

高中数学 之 课程讲义

(哈尔滨市第三中学清北班试用)

丙午年孟春之月 乔诗桐书



SWU 数学与统计学院 及 哈尔滨市第三中学

2026 年 2 月 26 日

前言之一

希望可以如愿进入哈尔滨市第三中学任教.

2024 年 4 月

前言之二

于数学求索的途中,我何其有幸,得遇钟老师这般兼具精湛授课技艺与深厚科研素养的引路人.八教六楼的早八课堂,奔波的辛苦总会被他的课堂轻易消解——他总以研究者的独特视角,为我们揭开数学概念背后的故事,将抽象的符号与定理化作鲜活的探索旅程.他讲课时爽朗的笑容,是我始终向往的模样,更让我窥见那份骨子里的、发自内心的、纯粹到无法伪装的对数学的热爱.课堂上,每当我觉得领会到了他的 main idea,我常常会对他的观点颌首回应,而他投来的目光里,满是渴望与期待,那份沉甸甸的期许,让我从不敢有丝毫辜负.这从不是严师对学生的生硬说教,而是一位前辈对后辈最真挚的关怀与托举.

让我印象最为深刻的,是 2025 年 11 月 14 日与钟老师的第一次 deep talk.本是抱着问题走进他的办公室,却不料一聊便是许久,话题也从中学数学教育延伸到公理化数学,又谈及从拓扑角度给出可测函数的自然定义……那一次,我才真切感受到钟老师风趣鲜活的另一面,却也因自身的普通与迷茫,生出几分自惭.而他的一番话,如暖阳般驱散了我心底的阴霾:他直言我的优秀,消解我的自卑,甚至觉得我读师范实属可惜,鼓励我投身数学研究.他亦坦言,奖学金这类功利的标签远不及真实的数学水平重要,即便他大学四年未曾拿过一次奖学金,也未妨碍如今在授课与科研领域的深耕.这番话本是激励,我却一度误以为是为失败找的借口,功利心也悄然回笼.但正是这份真实的交流,让我慢慢懂得,数学研究的价值,从不在世俗的评判标准里,而在对真理的执着探求之中.

更幸运的是,在钟老师的带领下,我得以初次触碰学术项目的门径,窥见前沿数学的微光.他为我借来一本本我感兴趣的书籍,一句“要把书一直读下去”的叮嘱,如种子般在我心底扎根;也因他的引荐,我得以结识诸多优秀的同龄人与前辈,让我在数学的路上,不再孤单.

钟老师对数学史与数学教育很感兴趣,有次和老师聊到要自己写一份实分析(实变函数)的讲义,但因自己的懒惰和薄弱的数学基础变得举步维艰,所以退而求其次写了这份高中数学讲义,也是对钟老师教诲的梳理与沉淀.

2025 年 11 月

前言之三

某次听谢启鸿老师讲课时,他提到了两个英年早逝的数学天才,一个是给出了高于四次的一般代数方程没有一般形式的代数解的证明的挪威数学家阿贝尔,另一个是天才少年伽罗瓦.我被伽罗瓦的故事深深吸引,而最让我着迷的是他整理完自己所有的解答,慷慨面对死亡前说的那句话.

阿贝尔死于贫穷,伽罗瓦则死于愚蠢.全部科学史上,极度愚蠢战胜不可抑制的天才的例子,再没有比埃瓦里斯特·伽罗瓦过于短促的一生所提供的例子更全面了.关于他的不幸的记录,很可能作为一切自负的教书匠、无耻的政客,以及骄傲自满的院士们的一个不祥的纪念碑而竖立.伽罗瓦不是“无用的天使”,但是面对大群愚蠢的人联合反对他,就连他那非凡的力量也被粉碎了,他在同一个接着一个的不可战胜的蠢材的斗争中,耗尽了自己的生命.(在告别人世的前夜)整个晚上,他把飞逝的时间用来焦躁地一气写出他的科学上的最后遗言,在死亡之前(他预见到死亡能够追上

他) 尽快地写, 把他丰富的思想中那些伟大的东西尽量写一些出来。他不时中断, 在纸边空白处写上“我没有时间, 我没有时间”, 然后又接着涂写下一个极其潦草的提纲。他在天亮之前那最后几个小时拼命写出的东西, 将使世代代的数学家们忙上几百年。他一劳永逸地给一个折磨了数学家达几个世纪之久的谜, 找出了真正的解答。这个谜就是在什么条件下方程是可解的。但这只不过是许多事情中的一件。在这项伟大的工作中, 伽罗瓦极其成功地用了群论。伽罗瓦的确是今天在全部数学中具有根本重要性的这一抽象论的一位伟大先驱者。伽罗瓦把他的遗嘱委托给他忠实的朋友舍瓦利耶, 全世界都应该感谢它被保留了下来。“我亲爱的朋友,” 他开始写道, “我在分析方面作出了一些新的发现。” 然后他在时间允许的情况下着手写出大纲。它们是划时代的。他结束说: “请雅可比或高斯公开提出他们的意见, 不是对这些定理的正确性, 而是对它们的重要性。我希望以后会有人发现, 辨读这一堆写得很潦草的东西, 对他们是有利的。满怀激情地拥抱你。E• 伽罗瓦。” 1832 年 5 月 30 日清晨很早的时候, 伽罗瓦在“决斗场”与他的对手相遇。决斗是在 25 步的距离用手枪对射。伽罗瓦倒下了, 肠子被射穿。没有医生在场。他被丢在他倒下的地方。9 点钟的时候, 一个路过那里的农民把他送到科尚医院。伽罗瓦知道他快死了。在不可避免的腹膜炎开始以前, 在他的神志仍然完全清醒的时候, 伽罗瓦拒绝了一个神父的祈祷。也许他记起了他的父亲。他的弟弟, 他的家人中唯一得到通知的一个, 流着泪赶到了。伽罗瓦努力以一种坚韧精神去安慰他的弟弟: “不要哭,” 他说, “我需要我的全部勇气在 20 岁时死去。” 1832 年 5 月 31 日上午, 伽罗瓦在他生命的第 21 个年头去世了。他被埋葬在南公墓的普通壕沟里, 所以今天伽罗瓦的坟墓已无踪迹可寻。他不朽的纪念碑是他的著作, 共 60 页。

节选自: 贝尔《数学大师》

是重要性, 而不是正确性。

而且是让高斯, 这个数学界几千年来公认的最伟大的三个数学家之一的高斯来承认这一点。

而且这是这个年轻人留给世界的最后一句话。

我想, 这就是我对天才的所有幻想吧。

伽罗瓦点燃了我对数学探索的兴趣, 却也让我明白了在纯数学领域, 平庸的数学家与天才之间不可跨越的鸿沟。我现在还常常在想, 如果继续读数学的研究生的话会是怎样, 可能会很痛苦吧, 毕竟我不是那样的天才, 注定没有能力说出这样惊世骇俗的话, 但这丝毫不影响我对伽罗瓦生平的兴趣, 以及对这个数学家的无限敬仰。

最后, 祝福伽罗瓦, 祝福每一个数学家。

2026 年 2 月

课程内容

在课程知识点的选择上, 有如下四个内容需要略加解释:

1) 初高中衔接

与大部分教材的讲法不同, 我们并没有单纯地把“解各类不等式”作为文字意义上的“初高中衔接”。初等数学分为“代数”与“几何”两部分, 笔者认为初中数学太过注重平面几何的各种

辅助线技巧，而此类问题在高中数学几乎都是用解析的办法来处理，即利用代数手段解决几何问题，初中数学的讲法和学法（归因于考法）造成了大部分新高一对代数变形能力弱，这对高中数学和后续高等数学的学习是非常不利的，高中更侧重用“函数—方程—不等式”这种逻辑来处理转化问题，因此，在初高中衔接这一合适的时机讲代数变形是很有必要的。

2) 集合论与数理逻辑初步

我们选择在课程伊始便引入集合论与数理逻辑，与传统的讲法有很大不同（传统讲法由集合与逻辑在高考中的难度决定），集合论是现代数学的基石，映射是最基本的工具，尽早引入这些概念使得课程后续的诸多定义陈述变得自然明了。实际教学也表明单纯讲述集合与讲述集合与映射的难度无论对教师还是学生的难度是无差别的，同学们对此接受程度很高。因此，课程的讲法更“公理化”，之后到高等数学和现代数学的过渡变得水到渠成。

3) 点 3

解释 3

4) 点 4

解释 4

课程作业与习题

作业是课堂所讲述内容的补充与支撑，与课堂内容同等重要。在题目选择方面，首要考虑的它们在数学和科学中的重要性，其次是它们对于应试的帮助，再其次是问题背后想法和机制的优美程度以及困难性。课程在每章结束后设有“习题课”和“习题课教案”，我们不提倡偏题难题，不为解题而解题。大家也都顽固地坚持老派的信条，坚信数学至少相当的一部分内容是技术性的，必须经过反复练习才能领会贯通。所以，这门课程坚持足够的作业量和一定质量的习题，在做习题的过程中同学自然就可以引导思考启发原创。

作业题目通常有四种形式：

1) 课程内容的补充

解释

2) 高中数学教材上的某些习题

高中数学教材中有很多有意思的问题，不仅是人教 A 版，人教 B 版，还有北师大版，苏教版，湘教版，沪教版。我们从中广泛取材，尤其是一些二级结论，比如说基本不等式链、糖水不等式、柯西不等式、高中常见的函数图像、奇函数模型、极化恒等式、等和线、外接球的相关结论、三余弦定理、三正弦定理、空间余弦定理、椭圆和双曲线焦点三角形的结论、焦点弦的结论、抛物线焦点弦的结论。这是基本训练，应试数学上不应该回避二级结论。

3) 历年高考题以及百强名校的模考题

其一，每年高考考查的知识点（题型）在历年真题中均有所体现，不只是新高考卷（全国卷），也包括地方卷。比如说，2024 新一卷导数题考查的“端点验证法”，这在 2022 新二卷、2023 甲卷、2024 甲卷、2024 新一卷均有所考查；2024 新二卷选择题第 8 题考查的“穿根法”在 2022 乙卷理科第 10 题（文科第 12 题）有所考查；2023 乙卷的立体几何题完全模仿 2017 全国三卷

(理科); 2024 新一卷的压轴大题 (19 题) 完全模仿 2022 北京卷压轴大题 (21 题), 这样的例子不胜枚举. 因此, 历年高考题值得同学进行总结和反思.

其二, 六年新高考以来, 很多经典的模拟题值得全国各地的同学去练习. 比如说武汉的调考 (武汉九调, 十调, 二调, 四调)、广州和深圳的一模二模、南京和南京盐城的一模二模、苏锡常镇的模考、浙江 Z20 的模考、杭州的一模二模、镇海中学的模考、宁波的一模二模、福建省质检、合肥的一模二模、济南一模、山东省名校联盟考试、东北三省三校联盟考试、哈三中的模考 (哈三中压中了 2025 新二卷的压轴大题!)

4) 强基数学和竞赛数学中的习题

我们的目光并不局限于高考数学, 而是高考数学, 强基数学, 竞赛数学, 以及和高等数学的过渡与衔接, 涵盖了代数综合、平面几何、初等数论、组合数学、微积分基础五大核心内容. 例如 “各种代数上的恒等变形公式与技巧”、“数论”、“平面几何中的重要定理”, 以及 “映射的相关性质” “基础集合论” “数理逻辑” “常用的证明方法” “常用的初等不等式” “反函数及其性质” “复数的相关知识” “参数方程” “极坐标” 这些高中-大学数学衔接内容. 传统上, 上述知识在高中数学只会略微提及或者干脆不讲. 我们课程 (讲义) 的讲法也是对读者后续 (进入数学系) 的学习做铺垫.

其他

这里写内容

课程所使用的参考书目

我们在讲义和习题的编写中参考 ($\approx$ 抄) 了很多文献、很多例子和掌故也是道听途说, 来自师长、同学或者同事. 以下是主要参考书目, 部分课题和习题选自这些教材:

- 高中数学教材 (人教 A 版, 人教 B 版, 北师大版, 苏教版, 湘教版, 沪教版).
- 一些高中数学竞赛书.
- 梅加强数学分析.
- rudin 数学分析.
- 谢惠民数学分析习题课讲义.
- 谢启鸿高等代数.
- 丘维声解析几何.
- HPM: 数学史与数学教育.
- 西弗尔曼数论概论.

声明

- 作为国家公费师范生，哈尔滨市第三中学始终是我向往的工作地方.
- 这是笔者教学生涯中尝试的一小步.
- 我们对讲义中的数学的原创性没有贡献.
- 感谢我在鸡东县第二中学读高中时曾教过我的黄光荣老师，何公平老师，作业帮刘天麒老师，我的数学引路人赵礼显老师，他们对我高中数学的学习和理解有着莫大的帮助，讲义中有相当一部分内容来自他们的传授（语录）.
- 感谢我在西南大学数学与统计学院读本科时曾教过我的钟新教授，李嘉教授，任冬梅老师，何世芬教授……讲义的观点较高，这要归功于他们课上课下的传授.
- 感谢复旦大学数学科学学院谢启鸿教授，北京大学数学科学学院丘维声教授，清华大学求真书院刘思齐教授，南京大学数学系梅加强教授，多伦多大学的 Maki 老师，他们用爱发电，公开录制的课程让我受益匪浅.
- 特别感谢同济大学数学科学学院的朋友（粉丝）夏孙泽雨，他于 2026 年 2 月 6 日通宵帮我制作了完整的讲义模板和使用教程，否则这份讲义还要晚发出好几年.
- 讲义中包含很多笔误，请谨慎使用. 一方面是笔者的粗心与懒惰之过，一方面因为同学们在系统地学习后声称也学会了如何自动纠正笔误（所以没必要改了），我们姑且信之.
- 如果在阅读之后能多多找出笔误的修改意见（我的邮箱：3267879571@qq.com），笔者在哈尔滨市第三中学备有拿铁和茗茶聊表心意.

但卑意欲少年为学者，每一书皆作数过尽之。书富如入海，百货皆有，人之精力，不能兼收尽取，但得其所欲求者尔。故愿学者每次作一意求之。如欲求古今兴亡治乱、圣贤作用、但作此意求之，勿生余念。又别作一次，求事迹故实典章文物之类，亦如之。他皆仿此。此虽迂钝，而他日学成，八面受敌，与涉猎者不可同日而语也。

——苏轼 又答王庠书



目录

A 初高中衔接	13
1 从头讲起：初高中衔接——代数部分 A	13
1.1 整式的恒等变形	13
1.2 作业：乘法公式，主元思想，对称式	15
1.3 分式与根式的恒等变形	16
1.4 作业：齐次式，共轭根式与有理化	21
1.5 补充：轮换对称式与对偶式	22
1.6 线性方程组的求解	23
1.7 作业：消元法，换元法	26
1.8 补充：再谈“自由度”	28
1.9 补充：换元法在高考数学，强基数学，竞赛数学中的应用	29
1.10 单变量的因式分解	35
1.11 作业：单变量的因式分解	38
1.12 多变量的因式分解	39
1.13 作业：多变量的因式分解	41
1.14 二次方程	42
1.15 作业：二次方程	43
1.16 关于代数部分 A 习题课的教案：基础代数公式，韦达定理，对称式与同构式，十字相乘、双十字相乘、换元法、主元法、大除法等因式分解方法在高考数学中的应用	44
2 初高中衔接——代数部分 B	46
2.1 高中常见不等式的解法	46
2.2 高中常见函数图像的画法	53
2.3 数论基础	62
2.4 关于代数部分 B 习题课的教案	66
2.4.1 第一次习题课	66
2.4.2 第二次习题课	67
2.5 关于代数部分 B 习题课的题目分析，讲法和解答	71
3 初高中衔接——几何部分	83
3.1 三角形及其性质	83
3.2 平面几何中的重要定理	85
3.3 四边形及其性质	94
3.4 圆及其性质	94
B 集合论与数理逻辑	98
4 现代数学的根基——集合论与数理逻辑初步	98
4.1 集合的定义与运算	98

4.2 映射及其性质	99
4.3 命题与量词	101
4.4 常用的证明方法	105
4.5 习题	111
4.5.1 定心丸——高考 90% 是这种难度	111
4.5.2 一些额外的经典题型——高一常考的，有印象吗？	111
4.5.3 一些必备的意识 or 数学思想	114
4.5.4 关于数理逻辑的一些题目	116
4.5.5 直接证明，反证法，数学归纳法在高考数学，强基数学，竞赛数学中的应用	117
4.5.6 来看看模拟卷的顶峰是咋考的	120
4.5.7 在 2024 和 2025 新一卷压轴 19 题中的应用	122
C 函数，方程，不等式	125
5 函数，方程，不等式之间的语言转化	125
5.1 等式及其性质	125
5.2 作业：加法公理和乘法公理	127
5.3 不等式及其性质	128
5.4 基本不等式	128
5.5 一类特殊的映射——函数	128
5.6 第一组习题：基本不等式	128
5.6.1 多次均值，翻折问题，求谁留谁和因式分解，糖水不等式，柯西不等式，琴生不等式，权方和不等式	128
5.6.2 其他常用的不等式	128
5.7 第二组习题：函数的三要素	128
5.7.1 求定义域的问题：具体函数定义域，抽象函数定义域，已知定义域求参	128
5.7.2 求函数解析式的方法：待定系数法，换元法，配凑法，方程组法，相关点法与求谁设谁，利用对称性	129
5.7.3 对应法则的本质：关于函数迭代的问题（类周期问题）	129
5.7.4 求值域的问题：复合函数值域，分段函数值域，二次函数（换元后是二次函数）值域，齐次分式的分离常数法，几何意义，高次/超越函数的求导求最值	129
5.7.5 一类易与“已知定义域求参”的“已知值域求参”问题	129
5.7.6 切比雪夫最佳逼近直线	129
5.8 第三组习题：函数的性质	129
5.8.1 单调性：复合函数单调性，分段函数单调性，抽象函数单调性，朗博同构	129
5.8.2 奇偶性：半区间求解析式，奇常模型，抽象函数奇偶性，单调性与奇偶性的综合问题	129
5.8.3 对称性与周期性，四大性质的综合问题	129
6 基本初等函数	130
6.1 正比例函数与反比例函数的推广——幂函数	130
6.2 指数与指数函数	130
6.3 指数的逆运算——对数，对数函数	130

6.4 反函数及其性质	130
6.5 角度的推广——任意角与弧度制	130
6.6 锐角三角函数的推广——任意角的三角函数	130
6.7 三角函数的公式	130
6.8 三角函数的图像与性质	130
6.9 三角恒等变换	130
7 一类特殊的函数——数列	131
7.1 用函数研究数列	131
7.2 等差数列的性质	134
7.3 等比数列的性质	136
7.4 斐波那契数列的性质	136
8 用导数研究函数	137
8.1 微积分的创立与发展	137
8.2 求差的推广——微分	137
8.3 求和的推广——积分	137
D 欧氏几何	138
9 用代数方法研究几何问题	138
9.1 代数系统——数系及其扩充	138
9.2 平面向量及其运算	138
9.3 解三角形	138
9.4 空间向量及其运算	138
9.5 简单几何体的表面积与体积	138
9.6 空间中点线面的位置关系	138
9.7 直线的方程	138
9.8 圆的方程	138
9.9 椭圆的方程	138
9.10 双曲线的方程	138
9.11 抛物线的方程	138
E 概率统计	139
10 概率统计	139
10.1 随机抽样, 用样本估计总体	139
10.2 排列组合与二项式定理	139
10.3 古典概型, 几何概型, 条件概率与全概率公式, 贝叶斯公式	139
10.4 离散型随机变量及其分布	139
10.5 二项分布与超几何分布, 正态分布	139
10.6 成对数据的统计相关性	139
10.7 一元线性回归模型及其应用	139

10.8 列联表与独立性检验	139
F 初等数论	140
11 初等数论	140
11.1 从经典的数论问题出发：什么是数论	140
11.2 整除和同余	140
11.2.1 习题 1: 整数的离散性	144
11.2.2 习题 2: 整除的概念和性质	145
11.2.3 习题 3: 带余除法与欧几里得算法	147
11.2.4 习题 4: 裴蜀定理及其应用	148
11.3 不定方程：勾股数组，方程 $x^4 + y^4 = z^4$ ，线性不定方程	148
11.4 同余方程：一次同余方程，同余方程组，高次同余方程	158
11.5 数论三定理：费马小定理，欧拉定理，中国剩余定理	162
11.6 算术基本定理，素数的分类与计数，梅森素数与完全数	162
11.7 平方剩余的概念，素数模的平方剩余	162
11.8 勒让德符号，二次互反律，雅可比符号	165
11.9 合数模的平方剩余	165
11.10 原根与指数	165
11.11 表正整数为平方和	165
11.12 平方数与方幂和问题	166
11.13 数论中常见的数：伯努利数，斐波那契数列，不足数，过剩数，完全数，等幂和公式	166
11.14 分数与小数的相互转化	166
11.15 连分数与数论函数	166
11.16 复数与三角和	166
G 组合数学	167
12 组合数学	167
12.1 组合计数：组合恒等式，圆排列，有重复元素的排列与组合，母函数	167
12.2 组合几何：凸图形与凸包，覆盖与嵌入，海莱定理，整点/格点问题	167
12.3 图论：图的基本概念，图的连通性，树，特殊的图	167
H 微积分	168
13 微积分基础	168

简介

本讲义的内容包含以下八个部分:

1) 初高中衔接:

- 初等代数;
- 初等几何.

2) 集合论与数理逻辑:

- 集合与映射;
- 逻辑与命题;
- 常用的证明方法.

3) 函数, 方程, 不等式:

- 基本初等函数, 方程, 不等式;
- 导数;
- 数列.

4) 欧氏几何:

- 向量, 复数, 解三角形;
- 立体几何与解析几何.

5) 统计概率:

- 计数原理;
- 统计;
- 概率.

6) 初等数论:

- 整除和同余;
- 数论函数与方程;
- 数论定理与问题.

7) 组合数学:

- 组合计数;
- 组合几何;
- 图论.

8) 微积分基础:

- 实数理论;
- 数列与级数的收敛性;
- 函数与映射的连续性;
- 导数与微分;
- 积分理论.



A 初高中衔接

1 从头讲起：初高中衔接——代数部分 A

1.1 整式的恒等变形

乘法公式

问题：如何快速计算单变量整式乘法？

整式的化简中，最重要的技巧就是利用乘法公式进行展开。虽然最终结果相同，但是使用了不同的方式进行整理，计算的难度会大相径庭。

例如，在计算 $(x+1)(x+2)$ 时，初学者往往会进行如下的化简：

$$\begin{aligned}(x+1)(x+2) &= x \cdot x + x \cdot 2 + 1 \cdot x + 1 \cdot 2 \\ &= x^2 + 2x + x + 2 \\ &= x^2 + 3x + 2.\end{aligned}$$

具体的步骤是：以第一个括号为准，将两个括号展开，之后合并同类项。对于乘法公式更为熟练的同学，会通过对于结果的预期，直接将答案写出来：我们发现这是两个关于 x 的一次式相乘，所以结果应该是一个二次式。那么我们只需要分别去确定二次项、一次项和常数项（零次式）分别是多少即可。

1. 二次项：两个括号各贡献一个 x ，得 $x \cdot x = x^2$ ；
2. 一次项：结果中的一次式有两个来源：第一个括号贡献一个 x ，第二个括号贡献一个常数（零次项） $+2$ ，得到 $2x$ ；第一个括号贡献 $+1$ ，第二个括号贡献一个 x ，得到 x 。这样，一次项为 $2x + x = 3x$ ；
3. 常数项：两个括号各贡献一个常数，得 $1 \cdot 2 = 2$ 。

这样，总的结果为 $x^2 + 3x + 2$ 。我们不需要再严格按括号展开，而是根据“**对结果的预期**”和“**每一项的来源**”来完成展开。这是我们在使用乘法公式时最重要的基本方法，希望大家可以通过反复练习，熟练掌握。

我们再举一个更复杂一点的例子。展开

$$(x-2)(2x^2+5x-7).$$

这是一个一次式、一个二次式的乘积，所以我们预期结果是一个三次式。这样，我们需要分别去确定三次项、二次项、一次项和常数项。

1. 三次项： $x \cdot 2x^2 = 2x^3$ ；
2. 二次项：两个来源，第一个括号如果贡献 x ，那么第二个括号需要贡献 $5x$ ，得到 $5x^2$ ；第一个括号如果贡献 -2 ，那么第二个括号贡献 $2x^2$ ，得到 $-4x^2$ 。

$$5x^2 - 4x^2 = x^2$$

就是二次项；

3. 一次项：两个来源，第一个括号如果贡献 x ，那么第二个括号需要贡献 -7 ，得到 $-7x$ ；第一个括号如果贡献 -2 ，那么第二个括号贡献 $5x$ ，得到 $-10x$ 。

$$-7x - 10x = -17x$$

就是一次项；

4. 常数项： $-2 \cdot (-7) = 14$ 。

将上述结果合并，得到 $2x^3 + x^2 - 17x + 14$ 。从而

$$(x-2)(2x^2+5x-7) = 2x^3 + x^2 - 17x + 14.$$

如何检查我们的展开结果呢？我们发现，当 $x=2$ 时，原式为 0。那么我们将 $x=2$ 代入到展开式中，应该也是 0：

$$2 \cdot (2)^3 + 2^2 - 17 \cdot 2 + 14 = 16 + 4 - 34 + 14 = 0.$$

所以，我们的结果应该是正确的，至少“不是错的”。

主元思想

问题：如何快速化简多变量整式乘法？

在刚才对于乘法公式的使用中，我们只有一个字母 x 。但是实际应用中，我们经常会有多个字母出现在代数式中。这时，我们应该如何展开呢？

假设我们需要展开 $(a+b+2)(a+3b-1)$ 。如果直接使用乘法公式展开，我们会得到：

$$\begin{aligned}(a+b+2)(a+3b-1) &= a^2 + 3ab - a + ab + 3b^2 - b + 2a + 6b - 2 \\ &= a^2 + 3b^2 + 4ab + a + 5b - 2.\end{aligned}$$

我们可以将结果按 a 的降幂排列，得到

$$a^2 + 3b^2 + 4ab + a + 5b - 2 = a^2 + 4ab + a + 3b^2 + 5b - 2.$$

但是在实际应用中， a, b 两个字母的地位可能是不同的。例如，可能 a 是真正的**未知数**，而 b 只是一个给定的**参数**，最终需要通过一些方法具体求出。在这种情况下，我们可以利用**主元思想**来进行展开：我们把 a 当作真正的变量（未知数），而 b 当作一个常数。这样的话，我们的式子应该写为：

$$(a+b+2)(a+3b-1) = [a+(b+2)][a+(3b-1)].$$

这里 $b+2, 3b-1$ 都是常数。这样的话，我们就得到了一个关于 a 的二次式，可以按刚才的方法进行展开：

1. 二次项： a^2 ；
2. 一次项：第一个括号贡献 a ，那么第二个括号贡献 $3b-1$ ，得 $(3b-1)a$ ；第一个括号贡献 $(b+2)$ ，那么第二个括号贡献 a ，得 $(b+2)a$ 。这样，一次项为

$$(3b-1)a + (b+2)a = (4b+1)a.$$

3. 常数项： $(b+2)(3b-1) = 3b^2 + 5b - 2$ 。

所以, 展开式可以整理为:

$$(a+b+2)(a+3b-1) = a^2 + (4b+1)a + 3b^2 + 5b - 2.$$

和原来得结果是相同的。

在高中数学的学习中, 我们经常会使用这种主元思想。所以希望大家在一开始就对它有一个基本的了解, 在后续学习中注意它的使用场景, 并加以熟练掌握。

主元思想不光在**展开括号**时会用到, 在**合并同类项**时也经常会使用, 并且我们通常会选择次数**更低**的变量作为主元, 我们将在作业中看到这样的例子。

对称式

问题: 是否存在具有对称性的代数式?

我们在初中数学的学习中, 就已经接触过对称式了。例如, 对于二次方程 $ax^2+bx+c=0(a \neq 0)$, 若它的两个根为 x_1, x_2 , 那么由韦达定理:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a}. \end{cases}$$

我们发现: 如果将 x_1, x_2 看成两个变量(字母), 那么 $x_1 + x_2$ 和 $x_1 x_2$ 都是**二元对称式**: 如果在代数式中, 交换 x_1, x_2 , 我们的代数式不会发生改变。

例如, 若交换 x_1, x_2 , 那么 $x_1 + x_2$ 将会变为 $x_2 + x_1 = x_1 + x_2$; 而 $x_1 x_2$ 则会转变为 $x_2 x_1$, 它也等于 $x_1 x_2$. 所以, 它们都是关于 x_1, x_2 的**二元对称式**。

任意关于 x_1, x_2 的二元对称多项式, 都可以用 $x_1 + x_2, x_1 x_2$ 来表示。例如

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2,$$

$$x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 = x_1 x_2 (x_1 + x_2).$$

所以, 在研究对称式的取值范围时, 我们通常会使用这样的**换元**: 令 $a = x_1 + x_2, b = x_1 x_2$, 再利用 a, b 去表示这个对称式, 最终求出取值范围。

1.2 作业: 乘法公式, 主元思想, 对称式

哈尔滨市第三中学, 29-30 秋季学期, 初高中衔接——代数部分 A, 作业 1

以下是一些很具有启发性的题目, 希望大家可以通过习题 1 熟悉乘法公式(希望学有余力的同学可以探索第四小问 n 次幂的情形, 并了解“**杨辉三角**”); 习题 2 第一小问的逆过程称为**双十字相乘**(我们会在本章最后进行详细阐述), 后面几个小问则与解析几何中**直曲联立**的计算以及**定点问题**密切相关, 未来我们会讲述很多类似题目; 习题 3 和 4 则是帮助大家熟悉处理对称式的基本技巧和方法(我们会在最后一个小问见到处理一切数学问题最常用的思想)。

习题 1 利用乘法公式展开下列括号:

1. $(x+1)(x-7)$;

2. $(x+1)(x+2)(x+3)$;

3. $2(x+3)(x^2+6x+7)$;

4. $(a+b)^3$.

习题 2 利用主元思想展开下列括号或化简表达式:

1. 分别以 a, b 为主元, 展开

$$(a+b-2)(2a-3b+7).$$

2. 将方程

$$\frac{x^2}{4} + \frac{(kx+3)^2}{3} = 1$$

化简成一个关于 x 的二次方程。

3. 将方程

$$(2k+1)x + (3k-1)y - 3 = 0$$

化简成一个关于 k 的一次方程。若上式对任意实数 k 都成立, x, y 应满足什么条件?

4. 对于方程 $2x^2 + 2kx - x + 5k - 15 = 0$:

(a) 以 x 为主元整理, 并用求根公式求出 x ;

(b) 以 k 为主元整理, 当 $x \neq -\frac{5}{2}$ 时, 求出 k .

习题 3 已知 $x+y=2, xy=-3$, 不求 x, y , 直接求:

1. $x^2 + y^2$;

2. $x^3 + y^3$;

3. $x^4 + y^4$;

4. $x^3y + xy^3$;

习题 4 已知 x 为实数, 且 $x + \frac{1}{x} = 3$, 不求 x , 直接求:

1. $x^2 + \frac{1}{x^2}$;

2. $x^3 + \frac{1}{x^3}$;

3. $\frac{x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 3x + 1}{x^2}$;

4. 若 $x > 1$, 求 $x - \frac{1}{x}$.

1.3 分式与根式的恒等变形

齐次式

问题: 我们在初中学过完全平方公式, 这个名字是怎么来的?

展开 $(a+b)^2$, 得到:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

不难发现, 展开式中的所有项 $(a^2, 2ab, b^2)$ 都是二次的, 我们称 $a^2 + 2ab + b^2$ 为**二次齐次式**, 当然这个定义是可以推广的:

若一个多项式中的所有项均为 m 次的, 则称该多项式为 **m 次齐次式**。

m 次齐次式最重要的性质是: 当所有变量变为原来的 k 倍时, 整个代数式的结果变为原来的 k^m 倍。例如, 对于 $(a+b)^2$ 而言, 若 a 变为 ka , b 变为 kb , 那么代数式变为:

$$(ka+kb)^2 = k^2(a+b)^2.$$

代数式是原来的 k^2 倍。

再如, $a^3 + 2a^2b + ab^2 - 3b^3$ 是三次齐次式。若 a 变为 ka , b 变为 kb , 则代数式变为:

$$(ak)^3 + 2(ak)^2(bk) + (ak)(bk)^2 - 3(bk)^3 = k^3a^3 + 2k^3a^2b + k^3ab^2 - 3k^3b^3.$$

提公因式 k^3 , 得到:

$$(ak)^3 + 2(ak)^2(bk) + (ak)(bk)^2 - 3(bk)^3 = k^3(a^3 + 2a^2b + ab^2 - 3b^3).$$

它是原表达式的 k^3 倍。

齐次式的性质决定了: 当分式的分子、分母是同次齐次式时, 可进行**比值换元**。举例如分式:

$$\frac{x^2 + xy + y^2}{y^2}.$$

分子、分母都是二次齐次式。令 $t = \frac{x}{y}$, 分子、分母同除 y^2 , 得:

$$\frac{x^2 + xy + y^2}{y^2} = \frac{\frac{x^2}{y^2} + \frac{xy}{y^2} + \frac{y^2}{y^2}}{\frac{y^2}{y^2}} = \frac{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{x}{y} + 1}{1} = t^2 + t + 1.$$

它转化为关于 t 的二次函数。一般地, 若分子、分母为 m 次齐次式, 会化为关于 t 的 m 次函数 (本例分母退化为常数)。

再举一例, 分式:

$$\frac{x^2 + 3xy - y^2}{x^2 + y^2}.$$

令 $t = \frac{x}{y}$, 分子、分母同除 y^2 , 得:

$$\frac{x^2 + 3xy - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{\frac{x^2}{y^2} + \frac{3xy}{y^2} - \frac{y^2}{y^2}}{\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{y^2}} = \frac{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 3 \cdot \frac{x}{y} - 1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1} = \frac{t^2 + 3t - 1}{t^2 + 1}.$$

在上述例子中, 我们将双变量表达式化简为单变量表达式, 完成了**消元**。消元思想在求范围、解方程中非常常用; 比值换元则是导数模块“极值点偏移”的一组重要处理手段。

在处理二次分式齐次式的最值和范围问题时, 首先利用比值换元将双变量问题转化为单变量问题, 再用某些特定的处理手段来求最值。由于中学阶段接触到的 (可能考到的) 大部分都是连续变量和连续函数, 所以取值范围问题等价于最值问题, 只需分别求出最大值和最小值即可。

例如, 求分式 $\frac{x^2 + 2xy + 3y^2}{x^2 + y^2}$ 的取值范围.

令 $t = \frac{x}{y}$ ($y \neq 0$), 则 $x = ty$,

$$\text{原式} = \frac{t^2 y^2 + 2ty \cdot y + 3y^2}{t^2 y^2 + y^2} = \frac{t^2 + 2t + 3}{t^2 + 1}$$

设 $y = \frac{t^2 + 2t + 3}{t^2 + 1}$ 是以 t 为自变量的函数, 整理为关于 t 的一元二次方程:

$$(y-1)t^2 - 2t + (y-3) = 0$$

由于 t 可以取遍所有实数 (当然也能取到一个 t 使方程有解!), 因此

$$\Delta = (-2)^2 - 4(y-1)(y-3) \geq 0 \implies y^2 - 4y + 2 \leq 0 \implies 2 - \sqrt{2} \leq y \leq 2 + \sqrt{2}$$

综上, 最大值为 $2 + \sqrt{2}$, 最小值为 $2 - \sqrt{2}$.

上述求“二次比二次”这种**齐次分式**取值范围用到的方法称为**判别式法**, 也称**万能 k 法** (通常把 y 用 k 替代), 这种方法具有一定的局限性, 对于一个具体的实际问题, 自变量通常不能取遍所有实数. 当自变量有范围限制时, 先**分离常数**, 再用比值换元转化为基本不等式或者对号函数去求解, 后续我们会进行详细讲述.

齐次式在高中的三角函数问题中也有重要的应用, 称为“**弦化切**”或“**齐次化切**”

具体来说, 在三角函数中, 若代数式是关于 $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ 的齐次式, 则可通过分子分母**同除** $\cos^n \theta$ (n 为齐次次数), 将式子转化为关于 $\tan \theta$ 的代数式, 从而简化计算.

例如: 已知 $\tan \alpha = 3$, 求 $\frac{3 \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha - \cos^2 \alpha}{2 \sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha + 4 \cos^2 \alpha}$ 的值.

注意到分子、分母均为 $\sin \alpha$ 、 $\cos \alpha$ 的二次齐次式, 同除 $\cos^2 \alpha$,

$$\text{原式} = \frac{3 \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right)^2 + 2 \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - 1}{2 \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right)^2 - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + 4}$$

代入 $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 3$ 得到

$$\text{原式} = \frac{3 \times 3^2 + 2 \times 3 - 1}{2 \times 3^2 - 3 + 4} = \frac{27 + 6 - 1}{18 - 3 + 4} = \frac{32}{19}$$

若式子不是齐次分式 (通常是齐次整式), 则可利用 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 转化成 (补成) 齐次式: 例如已知 $\tan \beta = \frac{1}{2}$, 求 $\sin \beta \cos \beta$, 可转化为 $\frac{\sin \beta \cos \beta}{\sin^2 \beta + \cos^2 \beta}$ (二次齐次式), 再弦化切得 $\frac{\tan \beta}{\tan^2 \beta + 1} = \frac{2}{5}$, 这种**转化与化归思想**是处理一切数学问题最常用的思想, 我们在前面的作业题中已经见过一次, 希望大家遇到问题 (不仅是数学问题) 时, 可以灵活地把一个困难的, 无从下手的问题转化为自己熟悉的, 可以解决的情形.

共轭根式与有理化

问题: 由于根式不是线性的 (不满足 $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$), 这是个很坏的性质! (绝对值亦是如此, 所以我们一直希望去掉根号、去掉绝对值), 平方是去掉根号的基本方法, 但在大部分问题中的运算量较大. 能否找到一种行之有效的去掉根号的办法?

解决这个问题的灵感来源是人类非常早的一个发明创造，称为“轭”，如下图所示：



图 1.1: 用车车轭

具体使用起来，大致就是这个样子的：

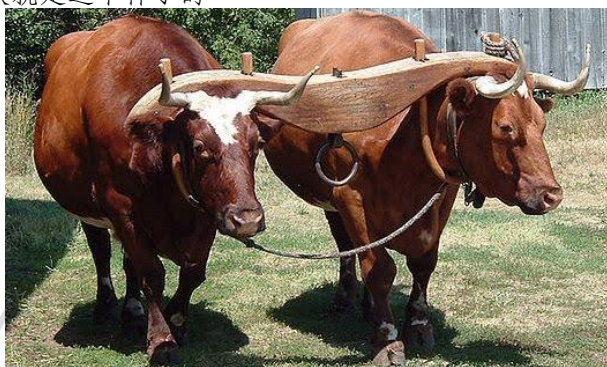


图 1.2: 连在两个牛脖子上的车轭

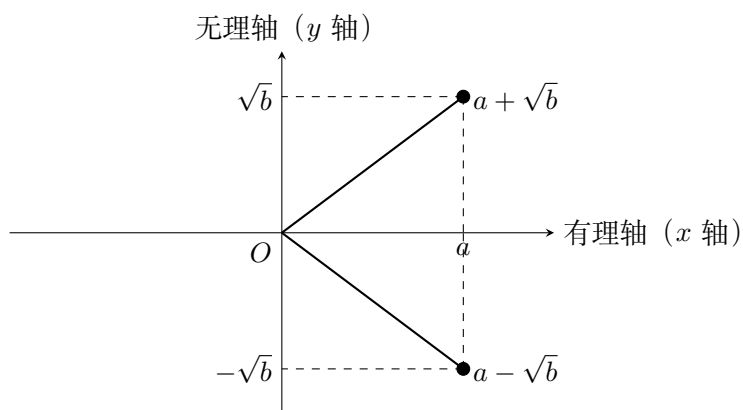
车轭在英语里被称为“*yoke*”，而“共轭”这个概念在英语里是——*conjugated*，这个词是拉丁语里来的，其实拆一下就是——*con*（共）-*jug*（轭），-*(a)te-*（形容词后缀）。所以呢，在拉丁语里，这个 *jug* 和英语的 *yoke* 就是同源的，而在遥远的东方大地上，还有个欧洲人奇葩的亲戚印度三哥，如今著名的词汇 *yoga*（瑜伽）源自梵语，追根溯源，本身就是车轭所引申出来的“联系”的含义，然后逐渐随着三哥的人生境界飞升到了“天人合一”这等玄妙意味了。当然了，其实无论是英国人（日耳曼人）还是拉丁人亦或是印度人，其祖先很可能就是那个发明或者传播了战车的中亚游牧民“原始印欧人”，与此相对的还有“轮子”这个词，演变到欧洲的 *cycle*, *circle* 等还没有脱离本意，但是在三哥那里已经是非常高大上的词——*cakrá-*（脉轮，也叫查克拉）。

历史上大致就是这样，其实原始印欧人造新词很奇怪，他们没东亚那么文雅，好多都来源于他们蛮荒时期的野外生活，其实就包括英语里的 *join*（古英语 *joign-*）也是来自于这个“轭”的，甚至还有很多高级词如 *jugular*（颈静脉，取“联系”这一含义）等，这方面的东西习惯就好。

总之，“共轭”的意思，本身就是让两匹（头）马（牛）劲往一处使的拉车，然而这两位未必多同心协力，他俩本身也存在对称相反，且互相牵制的特性，所以我们一般称呼这样的配对为“共轭”。

受此启发，我们回到正题，称形如 $a + \sqrt{b}$ 与 $a - \sqrt{b}$ 的两个根式互为**共轭根式**。这是在说，两个有理部分相等，无理部分互为相反数的根式互为共轭根式。

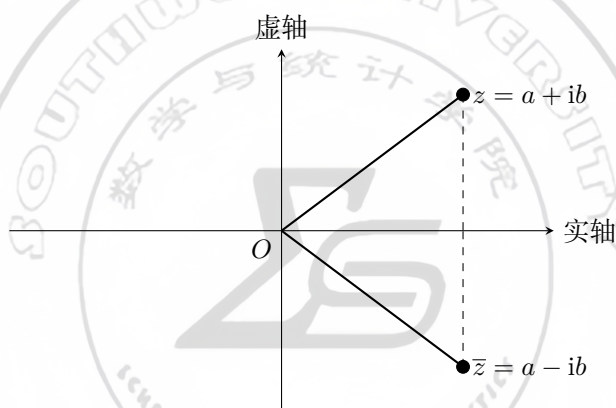
根式 $a + \sqrt{b}$ 可与平面上的点 $(a, \sqrt{b})$ 一一**对应**（可以建立双射将它们等同起来），将平面直角坐标系的 x 轴视为“有理轴”、 y 轴视为“无理轴”。那么，互为共轭根式的 $a + \sqrt{b}$ 与 $a - \sqrt{b}$ 关于有理轴对称。这两个根式的位置关系形状类似“车轭”，示意图如下：



“共轭”的应用非常广泛，未来我们还会学到**共轭复数**。

两个实部相等，虚部互为相反数的复数互为共轭复数 (conjugate complex number)。

所以，实部相同虚部相反的—— $z = a + ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$) 以及 $\bar{z} = a - ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$)，这么一对共轭复数，放在复平面上，它们是关于实轴对称存在的。



回到共轭根式：

共轭根式的特点是乘积不含根号，根据平方差公式

$$(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b}) = a^2 - (\sqrt{b})^2 = a^2 - b.$$

我们发现，共轭根式无需对整个式子平方，即可有效去掉根号，是化简根式的高效工具。

大家初中的学过的**分母有理化**，本质就是用共轭根式来化简的。例如：

$$\frac{1}{2 + \sqrt{3}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} = 2 - \sqrt{3}.$$

给分子、分母同乘 $2 + \sqrt{3}$ 的共轭根式 $2 - \sqrt{3}$ ，可将根号从分母转移到分子。

之所以要进行分母有理化？是因为对于两个分母相同的分数而言，分子具有线性性，即：

$$\frac{x+y}{z} = \frac{x}{z} + \frac{y}{z},$$

因此，我们在处理分式问题时，会尽可能地让分母简单（让分母是一个单项式！）

而对于两个分子相同的分数而言，分母不具有线性性，即：

$$\frac{x}{y+z} \neq \frac{x}{y} + \frac{x}{z}.$$

因此分母复杂时处理困难,我们希望分母简单,故通常将根号从分母转移到分子。(但这并不意味着不会使用“分子有理化”)

1.4 作业:齐次式,共轭根式与有理化

哈尔滨市第三中学, 29-30 秋季学期, 初高中衔接——代数部分 A, 作业 2

以下是一些很具有启发性的题目,习题 1 考查齐次整式的定义与判定;习题 2 和 3 考查齐次分式的计算,其中习题 2 的第二小问称为**轮换对称式**,在代数中具有很好的性质;习题 4 是齐次式在解析几何求**离心率**的一个应用,要注意“**比例**”与“**齐次条件**”的相互转化;习题 5 考查共轭根式,这还是一个**对偶式**,后续在三角函数中还会用到;习题 6 是根式化简,习题 7 是综合前两节的题目,习题 8 则是**椭圆方程**的第一定义.

习题 1 判断下列式子是否是齐次式,若是,指出它是几次的齐次式。

1. $x^2 + 3xy + y^2$;
2. $2x + 5y + 3$;
3. $a^2b - b^3 + 3abc$;
4. $x^2y^2 - 4x^4 - 5y^3x$;
5. $a^3 + b^3 - 5a^2b - 6ab^2 + 12ab$.

习题 2 已知 $x : y : z = 1 : 3 : 9$, 求:

1. $\frac{x^2 - 2xy - 3y^2}{y^2}$;
2. $\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}\right)^2$;
3. $\frac{x^2yz + xy^2z + xyz^2}{\sqrt[3]{x^4y^2z^4}}$;

习题 3 已知正实数 a, b, c 满足 $\frac{a-b+c}{a} = 6, \frac{b+c-a}{b} = 3$, 求 $\frac{a+b+c}{\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac}}$.

习题 4 已知 $a, b, c > 0$ 且 $a^2 = b^2 + c^2$. 在下列条件下,若能确定 $\frac{c}{a}$, 求它的值;否则说明理由。

1. $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$;
2. $b = 2c$;
3. $a = b - 2c$;
4. $a^2 + b^2 = 5c^2$;
5. $a = 1$;
6. $a = 3b, c = 2$.

习题 5 已知 $\sqrt{x+1} + \sqrt{x} = 2$, 求 $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$.

习题 6 化简: $\sqrt{43+24\sqrt{3}} + \sqrt{43-24\sqrt{3}}$.

习题 7 已知 x 是非零实数。

1. 证明: $x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2$;

2. 证明: $\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2} + 1} - \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} \leq \sqrt{3} - \sqrt{2}$.

习题 8 已知 $P(x, y)$ 是平面上一点, 点 $A(-1, 0), B(1, 0)$. $|PA| + |PB| = 4$.

1. 用勾股定理证明:

$$\sqrt{(x+1)^2 + y^2} + \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 4;$$

2. 求证:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

1.5 补充: 轮换对称式与对偶式

前面作业习题中见到了轮换对称式与对偶式。

轮换对称式

若将代数式中的变量按一定顺序 (如 $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$) 轮换后, 代数式的值保持不变, 则称该式为**轮换对称式**。

例如: $x + y + z$ 、 $xy + yz + zx$ 、 $x^2y + y^2z + z^2x$ 均为三元轮换对称式。

轮换对称式的性质:

1. 对四则运算封闭 (轮换对称式的和、差、积、商仍为轮换对称式);
2. 若轮换对称方程 $f(x, y) = 0$ 有解 (a, b) , 则必有解 (b, a) ;
3. 轮换对称式在各变量相等时取得最值。

例如, 已知 $x + y + z = 3$, $xy + yz + zx = 3$, 求 $x^2 + y^2 + z^2$ 与 $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ 的值。

由完全平方公式, $x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx) = 3^2 - 2 \times 3 = 3$; 利用轮换对称式公式: $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$, 代入得:

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 3 \times (3 - 3) = 0.$$

再来看一个例子:

已知 $x, y, z > 0$ 且 $x + y + z = 1$, 求 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ 的最小值。注意到 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ 是三元轮换对称式, 当 $x = y = z = \frac{1}{3}$ 时, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 9$;

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = (x + y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 9\sqrt[3]{xyz} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{xyz}} = 9,$$

综上, 最小值为 9 (当且仅当 $x = y = z$ 时取等)。

对偶式

若两个代数式 A, B 满足“运算后可消去复杂项 (如根式、虚数)”, 则称 A, B 互为对偶式。

例如: $a + \sqrt{b}$ 与 $a - \sqrt{b}$ (根式对偶)、 $x + \frac{1}{x}$ 与 $x - \frac{1}{x}$ (分式对偶)、 $z = a + ib$ 与 $\bar{z} = a - ib$ (复数对偶)。

对偶式的核心技巧是“配对求解”——将原式与对偶式相加/相乘, 消去复杂项, 简化计算。

例如, 已知 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2}$, 求 $\sin \theta - \cos \theta$ 与 $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta$ 的值。

设 $A = \sin \theta + \cos \theta$, $B = \sin \theta - \cos \theta$, 则 $A^2 + B^2 = 2$; 代入 $A = \frac{1}{2}$, 得 $B^2 = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$,
故 $B = \pm \frac{\sqrt{7}}{2}$; 求 $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta$: 利用立方和公式

$$\sin^3 \theta + \cos^3 \theta = (\sin \theta + \cos \theta)(\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta),$$

其中 $\sin \theta \cos \theta = \frac{A^2 - 1}{2} = -\frac{3}{8}$, 代入得:

$$\sin^3 \theta + \cos^3 \theta = \frac{1}{2} \times \left(1 - \left(-\frac{3}{8}\right)\right) = \frac{11}{16}.$$

再来看一个例子:

已知复数 $z = 2 + i$, 求 $z \cdot \bar{z}$ ($\bar{z}$ 为 z 的共轭复数) 及 $\frac{1}{z}$ 的值。

z 的对偶式 (共轭复数) $\bar{z} = 2 - i$, 相乘得:

$$z \cdot \bar{z} = (2 + i)(2 - i) = 4 - i^2 = 5;$$

利用对偶式有理化

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{2 - i}{5} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i.$$

共轭复数是对偶式在复数领域的延伸, 与根式对偶式的思路完全一致。

1.6 线性方程组的求解

问题: 对于线性方程组 (例如多元一次方程组), 有没有一种写起来更简单的算法? 最好先是观察观察系数, 再观察观察常数项, 就能知道有没有解, 有几个解。

消元法

在解方程组时, 最基本的方法就是消元。对于一个有多个未知数的方程, 我们没有一个“确定可行”的方法; 但如果我们能够把它转化成只含有一个未知数的一次方程或二次方程, 我们就可以求解了。像这样, 把含有多个未知数的方程组转化成只含有一个未知数的方程, 就是消元。

加减消元法

我们在解决鸡兔同笼问题时，会得到一个二元一次方程组。例如：

$$\begin{cases} 2x + 3y = 13, \\ 8x - 3y = 7. \end{cases}$$

我们发现，两个方程分别有 $+3y, -3y$ 两项，如果将它们相加，就可以成功消掉 y 。这样，我们就可以得到

$$(2x + 3y) + (8x - 3y) = 20 \implies 10x = 20 \implies x = 2.$$

同时，可以得到 $y = \frac{8x - 7}{3} = 3$ 。像这样，对方程直接进行加减操作消掉变量的方法就是加减消元法。

矩阵方法与自由度：该方程组的增广矩阵为

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 13 \\ 8 & -3 & 7 \end{pmatrix},$$

对矩阵做行变换 $R_2 \rightarrow R_2 + R_1$ 得 $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 13 \\ 10 & 0 & 20 \end{pmatrix}$ ，矩阵的秩 $r(A) = r(\bar{A}) = 2$ ，变量数为 2，因此自由度 $= 2 - 2 = 0$ （自由度 = 变量数 - 独立方程数），说明方程组有唯一解，与消元法结果一致。

代入消元法

代入消元法则是利用一个方程，将其中一个变量用其他变量表示后，代入新的方程的消元方法。例如，对于方程

$$\begin{cases} 2x + 5y = 19, \\ 7x - 10y = -16. \end{cases}$$

由第一个方程可得

$$x = \frac{19 - 5y}{2}.$$

代入到第二个方程，可得

$$\frac{7(19 - 5y)}{2} - 10y = -16 \implies 133 - 35y - 20y = -32 \implies 55y = 165 \implies y = 3.$$

代入第一个方程，得 $x = 2$ 。

在实际应用中，代入消元法更为常用。这是因为：很多方程的结构更为复杂，变量可能不是简单的一次方程。所以，加减消元法可能无法直接完成消元。

矩阵方法与自由度：该方程组的增广矩阵为

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 19 \\ 7 & -10 & -16 \end{pmatrix},$$

行变换后秩 $r(A) = r(\bar{A}) = 2$ ，变量数为 2，自由度 $= 2 - 2 = 0$ ，有唯一解，验证了消元法的结果。

待定系数消元法

待定系数消元法是通过设“系数参数”，将多个方程线性组合后消去指定变量的方法，尤其适用于三元及以上一次方程组的消元，核心是“先设系数 $\rightarrow$ 列等式 $\rightarrow$ 求系数 $\rightarrow$ 消元”。

例如，解三元一次方程组：

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 14, & (1) \\ 2x + y + 2z = 10, & (2) \\ 3x + 3y + z = 11. & (3) \end{cases}$$

若要消去 z , 设 $(1) \times a + (2) \times b + (3) \times c$ 的组合中 z 的系数为 0, 即:

$$3a + 2b + c = 0,$$

取简单的系数组合 $a = 1, b = -1, c = 1$ (满足 $3 \times 1 + 2 \times (-1) + 1 = 0$), 则:

$$(1) - (2) + (3) : (x + 2y + 3z) - (2x + y + 2z) + (3x + 3y + z) = 14 - 10 + 11,$$

化简得 $2x + 4y = 15 \implies x + 2y = 7.5$ (消去了 z); 再取另一组系数 $a = 2, b = -3, c = 0$ (满足 $3 \times 2 + 2 \times (-3) + 0 = 0$), 则:

$$2 \times (1) - 3 \times (2) : 2(x + 2y + 3z) - 3(2x + y + 2z) = 2 \times 14 - 3 \times 10,$$

化简得 $-4x + y = -2$, 结合 $x + 2y = 7.5$ 即可解出 x, y , 再代入求 z 。

矩阵方法与自由度: 该方程组的增广矩阵为

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 2 & 1 & 2 & 10 \\ 3 & 3 & 1 & 11 \end{pmatrix},$$

行变换后秩 $r(A) = r(\bar{A}) = 3$, 变量数为 3, 自由度 $= 3 - 3 = 0$, 有唯一解; 待定系数消元的本质是矩阵的行线性组合, 与矩阵行变换完全等价。

待定系数消元法的优势在于: 可主动指定要消去的变, 尤其适合结构不对称的多元方程组, 是高中解线性方程组的核心拓展方法。

换元法

我们在初中就已经接触过换元的思想了。当我们在恒等变形时, 看到很多较为复杂的表达式反复出现时, 就可以将它们整体替换为一个简单的字母。这样一来, 就可以得到一个简单的、进而有效的求解。

例如, 对于方程

$$(x^2 + x)^2 + x^2 + x - 2 = 0,$$

我们发现 $x^2 + x$ 反复出现, 且都是一起出现的。这样, 我们可以将它换元:

$$u = x^2 + x.$$

这样, 原方程化为

$$u^2 + u - 2 = 0.$$

它变成了一个关于 u 的二次方程。可以解得 $u = 1$ 或 $u = -2$ 。这样, 再对两种情况分别求解:

$$x^2 + x = 1 \quad \text{或} \quad x^2 + x = -2,$$

即可求出 x 。最终, 解得

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}.$$

能够看出换元, 需要一定的经验和敏锐的直觉。它们的培养离不开有效的练习, 量变最终才能产生质变。

常见的换元法有：三角换元，双换元，常值换元，特殊值换元，比值换元，均值换元，和积换元，自身换元，和差换元，整体与局部换元，减元与增元换元……我们会在学完导数和解析几何两大模块之后进行深入探究，学有余力的同学也可以去看 1.9 节的内容。

1.7 作业：消元法，换元法

哈尔滨市第三中学，29-30 秋季学期，初高中衔接——代数部分 A，作业 3

这里写作业说明

习题 1 判断下列方程组的自由度 (自由度 = 变量数 - 独立方程数)，若自由度为 0，求解方程组；若自由度不为 0，用正确个数的未知数表示其余未知数 (要求用矩阵法判断秩与自由度)。

(1)

$$\begin{cases} x + 2y = 2, \\ x - 2y = 0. \end{cases}$$

提示：增广矩阵 $\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ ，尝试求秩并判断自由度。

(2)

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ x - y + z = 0. \end{cases}$$

提示：变量数 3，尝试通过行变换求增广矩阵的秩，判断自由变量个数。

(3)

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1, \\ 10x - 15y = 5. \end{cases}$$

提示：观察方程间的倍数关系，求秩后判断自由度。

(4)

$$\begin{cases} x + y + z = 3, \\ x - y - z = -1, \\ 2x + y - 2z = 1. \end{cases}$$

提示：增广矩阵 $\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ ，尝试求秩并判断自由度。

(5)

$$\begin{cases} x + y - z = 1, \\ x - y + 2z = 2, \\ 2x + z = 3. \end{cases}$$

提示：观察第三个方程与前两个方程的关系，求秩后判断自由度。

习题 2 求解下列多元一次方程组 (要求结合矩阵法验证解的唯一性):

(1)

$$\begin{cases} x + 2y = 5, \\ 3x - 8y = -13. \end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases} 5x - 7y = -24, \\ 6x + 8y = 86. \end{cases}$$

(3)

$$\begin{cases} x + y - 2z = -3, \\ 2x + 3y + 3z = 17, \\ x - y - 8z = -25. \end{cases}$$

(4)

$$\begin{cases} x + y + z = 7, \\ 2x + 5y + 3z = 21, \\ 3x + 4y + 9z = 29. \end{cases}$$

习题 3 求解下列二元方程组 (灵活选用消元/换元法):

(1)

$$\begin{cases} x^2 + \frac{y^2}{2} = 1, \\ 2x + y = 1. \end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 = 1, \\ 3x - 5y = -2. \end{cases}$$

(3)

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3, \\ 2x^2 + 3xy + 2y^2 = 4. \end{cases}$$

(4)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - x^2y^2 = -23, \\ x + y - xy = -1. \end{cases}$$

(5)

$$\begin{cases} \frac{10}{x+y} + \frac{3}{x-y} = -5, \\ \frac{15}{x+y} - \frac{2}{x-y} = -1. \end{cases}$$

习题 4 解下列一元方程 (巧用变形/换元简化求解):

(1)

$$\frac{x+1}{x+2} + \frac{x+6}{x+7} = \frac{x+2}{x+3} + \frac{x+5}{x+6}.$$

(2)

$$2x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 3x + 2 = 0.$$

(3)

$$x^4 + x^3 - 4x^2 - x + 1 = 0.$$

习题 5 解下列一元无理方程 (注意验根):

(1)

$$\sqrt{x^2 + x + 3} = 2x - 1.$$

(2)

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{2x-5} = 3.$$

(3)

$$\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x^2+4x+3} = \sqrt{3x^2+4x+1}.$$

(4)

$$2x^2 - x - \sqrt{2x^2 - x + 3} = 3.$$

(5)

$$\sqrt{x^2 - x - 2} + \sqrt{2x^2 - x - 1} = \sqrt{3x^2 - 2x - 3}.$$

习题 6 解方程:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y+z} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{x+z} = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{x+y} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

习题 7 已知

$$(x + \sqrt{x^2 + 2020})(y + \sqrt{y^2 + 2020}) = 2020,$$

求 $x^2 - 3xy - 4y^2 - 6x - 6y + 58$ 的值。

1.8 补充: 再谈“自由度”

我们在前面的消元法中提到过自由度这个概念, 在之前的内容中我们给出过一个简化计算: 自由度 = 样本数 - 1。这一节我们来具体聊聊什么是自由度。

百度百科对自由度的定义

自由度 (degree of freedom, 简称 df) 指的是计算某一统计量时, **取值不受限制的变量个数**。通常满足公式:

$$df = n - k$$

其中 n 为样本数量, k 为被限制的条件数或变量个数。

变量约束与自由度的关系

假设现在有三个独立变量 x_1, x_2, x_3 , 且三者之间没有任何约束, 那么这三个变量的取值都是独立、不受限制的, 此时自由度 = 3 (有 3 个变量取值不受限)。

如果我们给这三个变量添加一个限制条件：

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

那么前两个变量的取值可以自由选择，但第三个变量的取值会被前两个变量唯一确定（即 $x_3 = -x_1 - x_2$ ），此时取值不受限制的变量个数为 2，对应的自由度 = 2。

方差：总体方差与样本方差的差异

方差的核心是衡量数据的波动程度，其中：

总体方差（针对整个总体）的计算公式为：

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{n}$$

这里总体均值 μ 是已知的，没有额外约束，因此自由度为 n 。

样本方差（针对样本）的计算公式为：

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

其中样本均值 $\bar{x}$ 由样本计算得到：

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

由于样本均值 $\bar{x}$ 是一个约束条件（相当于 $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0$ ），因此 n 个样本中只有 $n-1$ 个样本的取值可以自由波动，这就是样本方差分母为 $n-1$ 的原因，对应的自由度 = $n-1$ 。

回归：方程约束下的自由度

在回归分析中，假设我们有一个包含 k 个自变量的回归方程：

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k$$

这个方程本身就是一个约束条件，意味着自变量的取值需要满足方程的线性关系。若有 n 个自变量，此时可以自由变换的变量个数为 $n-1$ ，对应的自由度 = $n-1$ 。

以简单的线性组合为例，若回归方程为：

$$y = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

方程的约束使得 n 个自变量中只有 $n-1$ 个可以自由取值，最后一个变量会被前 $n-1$ 个变量唯一确定，因此自由度为 $n-1$ 。

自由度的本质是“不受约束的变量个数”，它在统计推断中是核心概念，直接影响方差、回归等分析的结果合理性。理解自由度的约束逻辑，能帮助我们更清晰地理解统计公式的设计原理。

1.9 补充：换元法在高考数学，强基数学，竞赛数学中的应用

换元法是高中数学最基本的代数处理手段之一，前面我们已经提到（讲到）了一些换元法，本节将以例题和变式题的形式进一步讲述其在高考数学，强基数学以及竞赛数学中的应用。

写到这里，不禁感叹时光飞逝，想起了 2024 年 7 月 7 日在西南大学第八教学楼上家教的场景（刚好也是讲的这个部分）：



图 1.3: 当时写的板书

那时刚转专业结束，暑假留校了，虽然重庆的天气炎热，但每天有大把时间沉浸在数学的日子让我十分舒适。

说回正题：

三角换元法

三角换元法的核心是利用三角函数恒等式（如 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 、 $\sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1$ ），将代数问题转化为三角问题，简化含根式、二次式的计算。

三角设参在向量中的应用

例题 1: 线段 AB 的长度为 2，点 A 、 B 分别在 x 非负半轴和 y 非负半轴上滑动，以线段 AB 为一边，在第一象限内作矩形 $ABCD$ （顺时针排序）， $BC = 1$ ，设 O 为坐标原点，求 $\vec{OC} \cdot \vec{OD}$ 的取值范围。

解析: 法 1: 设 $\angle OBA = \alpha$ ($\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$)，则 $OA = 2 \sin \alpha$ ， $OB = 2 \cos \alpha$ 。由旋转性质得：

- C 点坐标: $(\sin \alpha, 2 \cos \alpha + \sin \alpha)$ (沿 BC 方向平移 1 个单位)

- D 点坐标: $(2 \sin \alpha + \sin \alpha, \sin \alpha)$ (沿 AD 方向平移 1 个单位)

向量数量积计算：

$$\vec{OC} \cdot \vec{OD} = \sin \alpha (3 \sin \alpha) + (2 \cos \alpha + \sin \alpha) \sin \alpha = 2 \sin 2\alpha + 1$$

因 $\sin 2\alpha \in [0, 1]$ ，故取值范围为 $[1, 3]$ 。

法 2 (极化恒等式): 设 E 为 CD 中点，则 $\vec{OC} \cdot \vec{OD} = |\vec{OE}|^2 - |\vec{ED}|^2$ 。由 $|ED| = 1$ (矩形边长一半)，且 E 为 AB 平移中点， $|\vec{OE}| \in [\sqrt{2}, 2]$ ，故：

$$|\vec{OE}|^2 - 1 \in [1, 3]$$

三角换元在解析几何中的应用

例题 2: 已知圆 $O_2: (x+2)^2 + y^2 = 1$, $P(x, y)$ 为圆上任意一点, 求 $\frac{y-2}{x-1}$ 的最值及 $x-2y$ 的最值。

解析: 利用圆的参数方程设 $P(-2 + \cos \theta, \sin \theta)$ ($\theta \in [0, 2\pi)$):

1. 求 $\frac{y-2}{x-1}$ 的最值: 设 $t = \frac{\sin \theta - 2}{\cos \theta - 3}$, 整理得 $\sin \theta - t \cos \theta = 2 - 3t$ 。由辅助角公式:

$$\sqrt{1+t^2} \sin(\theta - \phi) = 2 - 3t \implies \left| \frac{2-3t}{\sqrt{1+t^2}} \right| \leq 1$$

解得 $t \in [\frac{3-\sqrt{3}}{4}, \frac{3+\sqrt{3}}{4}]$, 即最大值 $\frac{3+\sqrt{3}}{4}$, 最小值 $\frac{3-\sqrt{3}}{4}$ 。

2. 求 $x-2y$ 的最值:

$$x-2y = -2 + \cos \theta - 2 \sin \theta = -2 + \sqrt{5} \cos(\theta + \phi)$$

因 $\cos(\theta + \phi) \in [-1, 1]$, 故最值为 $-2 \pm \sqrt{5}$ 。

变式 3: 已知圆 $O_1: (x-3)^2 + (y-4)^2 = 1$, $P(x, y)$ 为圆上动点, 求 $d = x^2 + y^2$ 的最值。

解析: 设 $P(3 + \cos \theta, 4 + \sin \theta)$, 则:

$$d = (3 + \cos \theta)^2 + (4 + \sin \theta)^2 = 26 + 6 \cos \theta + 8 \sin \theta = 26 + 10 \sin(\theta + \phi)$$

故 $d_{\max} = 36$, $d_{\min} = 16$ 。

三角换元在无理函数中的应用

【类型 1】 $y = ax \pm \sqrt{b - cx^2}$ 型

例题 4: 求 $y = x + \sqrt{10 - 9x^2}$ 的值域。

解析: 由 $10 - 9x^2 \geq 0$ 得 $x \in [-\frac{\sqrt{10}}{3}, \frac{\sqrt{10}}{3}]$, 设 $x = \frac{\sqrt{10}}{3} \cos \alpha$ ($\alpha \in [0, \pi]$), 则:

$$y = \frac{\sqrt{10}}{3} \cos \alpha + \sqrt{10} \sin \alpha = \frac{10}{3} \sin(\alpha + \theta) \quad (\theta = \arctan \frac{1}{3})$$

因 $\sin(\alpha + \theta) \in [-\frac{3}{10}\sqrt{10}, 1]$, 故值域为 $[-\frac{\sqrt{10}}{3}, \frac{10}{3}]$ 。

【类型 2】 $y = ax \pm \sqrt{bx - cx^2}$ 型

例题 5: 求 $y = x - 3 + \sqrt{10 - 9x^2}$ 的值域。

解析: 变形为 $y = \frac{1}{3} \cdot 3x + \sqrt{10 - 9x^2} - 3$, 设 $3x = \sqrt{10} \sin \theta$ ($\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$), 则:

$$y = \frac{\sqrt{10}}{3} \sin \theta + \sqrt{10} \cos \theta - 3 = \frac{10}{3} \sin(\theta + \phi) - 3$$

因 $\sin(\theta + \phi) \in [-\frac{\sqrt{10}}{10}, 1]$, 故值域为 $[-\frac{\sqrt{10}}{3} - 3, \frac{1}{3}]$ 。

三角换元在多元函数中的应用

例题 6: 已知实数 x, y 满足 $4x^2 - 5xy + 4y^2 = 5$, 设 $S = x^2 + y^2$, 求 $\frac{1}{S_{\max}} + \frac{1}{S_{\min}}$ 。

解析: 设 $x = \sqrt{S} \cos \alpha$, $y = \sqrt{S} \sin \alpha$, 代入条件得:

$$4S - 5S \sin \alpha \cos \alpha = 5 \implies S = \frac{10}{8 - 5 \sin 2\alpha}$$

因 $\sin 2\alpha \in [-1, 1]$, 故 $S_{\max} = \frac{10}{3}$, $S_{\min} = \frac{10}{13}$, 则:

$$\frac{1}{S_{\max}} + \frac{1}{S_{\min}} = \frac{3}{10} + \frac{13}{10} = \frac{8}{5}$$

三角换元在分式型函数中的应用

例题 7: 求函数 $y = \frac{x - x^3}{1 + 2x^2 + x^4}$ 的值域。

解析: 变形为 $y = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{1+x^2} \cdot \frac{1-x^2}{1+x^2}$, 设 $x = \tan \frac{\theta}{2}$, 则:

$$\frac{2x}{1+x^2} = \sin \theta, \quad \frac{1-x^2}{1+x^2} = \cos \theta \implies y = \frac{1}{4} \sin 2\theta$$

因 $\sin 2\theta \in [-1, 1]$, 故值域为 $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$ 。

双换元法

双换元法通过设两个新变量替换原式中重复出现的复杂结构 (如根式、分式), 将问题转化为线性或二次关系求解。

根式之和的代数问题

例题 8: 已知实数 a, b 满足 $a + b = 5$, 求 $\sqrt{a+1} + \sqrt{b+3}$ 的最大值。

解析: 设 $x = \sqrt{a+1}$, $y = \sqrt{b+3}$ ($x \geq 0$, $y \geq 0$), 则 $x^2 + y^2 = 9$ 。目标函数 $t = x + y$, 由几何意义 (直线与圆相切):

$$\frac{|t|}{\sqrt{2}} \leq 3 \implies t_{\max} = 3\sqrt{2}$$

当 $x = y = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ 时, $a = \frac{7}{2}$, $b = \frac{3}{2}$, 等号成立。

一次分式之和的代数问题

例题 9: 已知 $x + y \leq 2$, 求 $\frac{2}{x+3y} + \frac{1}{x-y}$ 的最小值 ($x+3y > 0$, $x-y > 0$)。

解析: 设 $m = x+3y$, $n = x-y$ ($m > 0$, $n > 0$), 则 $m+n = 2(x+y) \leq 4$ 。目标函数:

$$\frac{2}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{4} \left(\frac{2}{m} + \frac{1}{n} \right) (m+n) \geq \frac{1}{4} \left(3 + 2\sqrt{\frac{2n}{m} \cdot \frac{m}{n}} \right) = \frac{3+2\sqrt{2}}{4}$$

当 $m^2 = 2n^2$ 时, 等号成立。

可因式分解的二次代数式问题

例题 10: 已知 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$, 求 $3x^2 - 2xy$ 的最小值。

解析: 因式分解得 $(\frac{x}{2} + y)(\frac{x}{2} - y) = 1$, 设 $m = \frac{x}{2} + y$, $n = \frac{x}{2} - y$ ($mn = 1$), 则 $x = m + n$, $y = \frac{m-n}{2}$ 。代入目标式:

$$3x^2 - 2xy = 2m^2 + 4n^2 + 6 \geq 4\sqrt{2} + 6$$

当 $2m^2 = 4n^2$ 时, 等号成立。

常值换元法

常值换元法用字母代替原式中重复出现的常数, 简化高次或复杂计算。

例题 11: 计算 $1987 \times 20002000 - 2000 \times 19871987$ 。

解析: 设 $x = 1987$, 则 $2000 = x + 13$, 原式变形为:

$$x \times 10001(x + 13) - (x + 13) \times 10001x = 0$$

变式 12: 计算 $\frac{1995^3 - 2 \times 1995^2 - 1993}{1995^3 + 1995^2 - 1996}$ 。

解析: 设 $a = 1995$, 则原式:

$$\frac{a^3 - 2a^2 - a + 2}{a^3 + a^2 - a - 1} = \frac{(a-2)(a^2-1)}{(a+1)(a^2-1)} = \frac{a-2}{a+1} = \frac{1993}{1996}$$

特殊值换元法

特殊值换元法在恒等式中取变量特殊值 (如 $x = 0$ 、 $x = -1$), 快速求解系数或代数式值。

例题 13: 已知 $(2x-1)^5 = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, 求 $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5$ 的值。

解析: 令 $x = -1$, 则:

$$(-3)^5 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 \implies \text{值为 } -243$$

变式 14: 已知 $(1-2x)^{2011} = a_0 + a_1x + \cdots + a_{2011}x^{2011}$, 求 $\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_{2011}}{2^{2011}}$ 的值。

解析: 令 $x = \frac{1}{2}$, 得 $a_0 + \frac{a_1}{2} + \cdots + \frac{a_{2011}}{2^{2011}} = 0$; 令 $x = 0$, 得 $a_0 = 1$ 。故所求值为 -1 。

比值换元法

比值换元法设比值为新变量, 将多变量问题转化为单变量或双变量问题。

例题 15: 已知实数 a, b, c 满足 $5c - 3a \leq b \leq 4c - a$, $c \ln b \geq a + c \ln c$, 求 $\frac{b}{a}$ 的取值范围。

解析: 设 $x = \frac{a}{c}$, $y = \frac{b}{c}$ ($c > 0$), 则条件化为:

$$5 - 3x \leq y \leq 4 - x, \quad \ln y \geq x \implies y \geq e^x$$

目标函数 $\frac{b}{a} = \frac{y}{x}$, 几何意义为可行域内点与原点连线斜率, 解得取值范围为 $[e, 7]$ 。

均值换元法

均值换元法设变量与均值的偏差为新变量 (如 $x = \frac{m}{2} + t$, $y = \frac{m}{2} - t$), 简化对称式计算。

例题 16: 求 $y = \sqrt{1-x} + \sqrt{x+3}$ 的最值。

解析: 设 $\sqrt{1-x} = \frac{y}{2} - d$, $\sqrt{x+3} = \frac{y}{2} + d$, 平方相加得:

$$y^2 + 4d^2 = 8 \implies y = 2\sqrt{2-d^2}$$

因 $d^2 \in [0, 1]$, 故 $y_{\max} = 2\sqrt{2}$, $y_{\min} = 2$, 则 $\frac{m}{M} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

和积换元法

和积换元法用 $x+y$ 、 xy 替换对称式中的 x 、 y , 简化二元问题。

例题 17: 因式分解 $(a+b-2ab)(a+b-2) + (1-ab)^2$ 。

解析: 设 $x = a+b$, $y = ab$, 则:

$$(x-2y)(x-2) + (1-y)^2 = x^2 - 2x(y+1) + (y+1)^2 = (x-y-1)^2 = (a+b-ab-1)^2$$

自身换元法

自身换元法将重复出现的复杂式子设为新变量, 或利用式子对称性 (如倒序相加) 求解。

例题 18: 计算 $\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2005} + \cdots + \frac{2004}{2005}\right)$ 。

解析: 设 S 为原式, 倒序得 $S = \frac{1}{2} + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{2004}{2005} + \cdots + \frac{1}{2005}\right)$ 。两式相加:

$$2S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 2004 = \frac{2004 \times 2005}{2} = 2009010 \implies S = 1004505$$

和差换元法

和差换元法设 $x = a+b$, $y = a-b$, 简化对称或线性约束问题。

例题 19: 已知 $4x^2 - 5xy + 4y^2 = 5$, 设 $S = x^2 + y^2$, 求 $\frac{1}{S_{\max}} + \frac{1}{S_{\min}}$ 。

解析: 设 $x = a+b$, $y = a-b$, 代入条件得:

$$3a^2 + 13b^2 = 5 \implies S = 2(a^2 + b^2) = \frac{10}{13} + \frac{20}{13}a^2$$

故 $S_{\max} = \frac{10}{3}$, $S_{\min} = \frac{10}{13}$, 所求值为 $\frac{8}{5}$ 。

整体与局部换元法

整体换元法将原式设为新变量, 局部换元法替换式子中的某一局部 (如根式、分式)。

例题 20: 已知不等式 $\sqrt{1+x} \geq 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{a}$ 对一切 $x \geq -1$ 成立, 求 a 的最大值。

解析: 设 $\sqrt{1+x} = t$ ($t \geq 0$), 则 $x = t^2 - 1$, 不等式化为:

$$t \geq 1 + \frac{t^2 - 1}{2} - \frac{(t^2 - 1)^2}{a} \implies a \leq 2(t+1)^2$$

因 $2(t+1)^2$ 最小值为 8 ($t \geq 0$), 故 $a_{\max} = 8$ 。

减元与增元换元法

减元换元法减少变量个数, 增元换元法增加变量简化结构 (如拆分根式)。

例题 21: 解方程 $\sqrt{10+x} + \sqrt[4]{7-x} = 3$ 。

解析: 增元设 $\sqrt[4]{10+x} = s$, $\sqrt[4]{7-x} = t$ ($s, t \geq 0$), 则 $s^4 + t^4 = 17$, $s^2 + t = 3$ 。解得:

$$(s, t) = (1, 2) \text{ 或 } (2, 1) \implies x = -9 \text{ 或 } 6$$

1.10 单变量的因式分解

问题: 代数基本定理揭示了一元 n 次方程都有 n 个复数根 (不计重数), 我们可以通过十字相乘法得到一元二次方程的两个根 (如果有的话), 进一步, 如何快速高效地得到一元高次方程的根?

一元二次式

解方程

我们在初中就学习过因式分解、解二次方程。事实上, 一元二次式的因式分解本质上就是在解二次方程。考虑二次式 $x^2 + bx + c$, 如果它的因式分解结果为

$$x^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2),$$

那么 $x^2 + bx + c = 0$ 等价于 $(x - x_1)(x - x_2) = 0$, 即它的两根为 x_1, x_2 。因此, 我们只需求出方程的解, 就可以完成因式分解。

根据二次方程求根公式, 我们知道 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两根为

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

故我们可以将 $ax^2 + bx + c$ 分解为

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a(x - x_1)(x - x_2) \\ &= a \left(x - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \left(x - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right). \end{aligned}$$

这就完成了分解。因此, 在高中的学习中, 如果需要对一元二次式进行因式分解, 只需利用求根公式求出两根即可。

十字相乘法

这是我们在课内学习的最基本的二次式因式分解的方法。考虑二次式 $x^2 + bx + c$, 假设我们能够将它分解成

$$x^2 + bx + c = (x + a_1)(x + a_2)$$

的形式, 那么将右侧展开, 得到

$$x^2 + bx + c = x^2 + (a_1 + a_2)x + a_1a_2.$$

由于这个式子对于任意的 x 都成立, 所以对应项相等:

$$a_1 + a_2 = b, \quad a_1a_2 = c.$$

换言之, 我们只需要找到这样的 a_1, a_2 就可以完成分解。

十字相乘法的本质在于, 通过对 c 的分解进行尝试, 最终找到合适的 a_1, a_2 。我们以 $x^2 + 5x + 6$ 为例, 我们需要找到 a_1, a_2 使得

$$a_1 + a_2 = 5, \quad a_1a_2 = 6.$$

注意到 $6 = 1 \times 6 = 2 \times 3$, 我们发现: 若 $a_1 = 1, a_2 = 6$, 则 $a_1 + a_2 = 7$, 不符合; 若 $a_1 = 2, a_2 = 3$, 则 $a_1 + a_2 = 5$, 满足条件。

我们通过基本的尝试发现, $a_1 = 2, a_2 = 3$ 是满足条件的, 所以

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3).$$

在展开计算右侧表达式的过程中, 我们有如下的步骤:

先计算二次项: $x \times x = x^2$;

再计算一次项: $x \times 3 + x \times 2 = 5x$;

最终计算常数项: $2 \times 3 = 6$ 。

如果我们把这个过程更形象化地表示出来, 可借助“十字相乘”辅助分解:

$$\begin{array}{r} x + 2 \\ \times x + 3 \\ \hline x^2 + 2x \\ + 3x \\ \hline x^2 + 5x + 6 \end{array}$$

对应两个 x 相乘,

对应十字交叉的一次项,

对应 $+2 + 3$ 相乘。

对 $a_1 = 1, a_2 = 6$ 的情况, 十字相乘结果为:

$$\begin{array}{r} x + 1 \\ \times x + 6 \\ \hline x^2 + x \\ + 6x \\ \hline x^2 + 7x + 6 \end{array}$$

一次项系数为 7, 不符合要求。

综上, 十字相乘法的基本步骤为:

写算式 (省略 x , 用 1 代替):

$$\begin{array}{r} 1+1 \\ \times 1+6 \\ \hline \end{array}$$

尝试十字相乘, 直到一次项系数正确:

$$\begin{array}{r} 1+2 \\ \times 1+3 \\ \hline \end{array}$$

还原因式分解: $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$ 。

因式定理

由于二次方程的因式分解和根有天然联系: 若 x_1 是 $x^2 + bx + c = 0$ 的根, 则 $(x - x_1)$ 是 $x^2 + bx + c$ 的因式。这是因为 $x_1^2 + bx_1 + c = 0$, 直接计算得:

$$(x - x_1) \left(x - \frac{c}{x_1} \right) = x^2 - \left(x_1 + \frac{c}{x_1} \right) x + c.$$

由 $x_1^2 + bx_1 + c = 0$ 得 $b = -\left(x_1 + \frac{c}{x_1}\right)$, 因此:

$$(x - x_1)\left(x - \frac{c}{x_1}\right) = x^2 + bx + c.$$

这里 $x_1 \cdot \frac{c}{x_1} = c$, 正是韦达定理的体现。

推广到一般多项式: 对于多项式 $f(x)$, $(x - x_1)$ 是 $f(x)$ 的因式 $\iff x = x_1$ 是 $f(x) = 0$ 的根。这就是因式定理, 它是高次多项式分解的基础——我们可以通过试根法确定一次因式, 再后续分解。

一元三次式与高次式

一元三次式

对于三次式 $x^3 + ax^2 + bx + c$, 若通过试根法得到根 $x = x_1$, 则可降次为:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = (x - x_1)(x^2 + dx + e).$$

试根的常用技巧: 对于首项系数为 1 的多项式, 优先尝试常数项的因数 (如常数项为 6, 试 $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$)。

例如: 多项式 $g(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 6$, 试 $x = 3$ 得 $g(3) = 0$, 故 $x - 3$ 是因式;

多项式 $f(x) = x^3 - 2x^2 - 2x + 1$, 试 $x = -1$ 得 $f(-1) = 0$, 故 $x + 1$ 是因式。

试出一次因式后, 用待定系数法分解剩余二次式: 以 $f(x) = x^3 - 2x^2 - 2x + 1$ 为例, 设

$$x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = (x + 1)(ax^2 + bx + c).$$

展开右侧得 $ax^3 + (a + b)x^2 + (b + c)x + c$, 对比系数得方程组:

$$\begin{cases} a = 1 \\ a + b = -2 \\ b + c = -2 \\ c = 1 \end{cases}$$

解得 $a = 1, b = -3, c = 1$, 故 $f(x) = (x + 1)(x^2 - 3x + 1)$ 。

简化待定系数法: 无需列全方程组, 直接比较最高次项和常数项系数

1. 三次项系数: 左侧 $1 = a$ (右侧 $ax^2 \cdot x$ 的系数);
2. 常数项系数: 左侧 $1 = c$ (右侧 $1 \cdot c$ 的系数);
3. 再通过一次项/二次项系数求 b (如一次项: $-2 = b + c \implies b = -3$)。

高次式

高次式分解与三次式一致: 试根 + 待定系数法。高中范围内, 掌握三次式分解即可应对绝大多数题目。

一种高效试根的办法: 有理根定理

对于整系数多项式 (系数都是整数) $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$, 若 $\frac{p}{q}$ (p, q 互质) 是它的有理根, 则: $-p$ 是常数项 a_0 的因子; $-q$ 是首项系数 a_n 的因子。

证明: 设 $\frac{p}{q}$ (p, q 互质) 是 $f(x)$ 的根, 即 $f\left(\frac{p}{q}\right) = 0$, 代入得:

$$a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \cdots + a_0 = 0.$$

两边乘 q^n 消分母:

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \cdots + a_0 q^n = 0.$$

观察等式:

前 n 项含因子 p , 故 $p \mid a_0 q^n$; 因 p, q 互质, 故 $p \mid a_0$ (p 是 a_0 的因子);

除最后一项外都含因子 q , 故 $q \mid a_n p^n$; 因 p, q 互质, 故 $q \mid a_n$ (q 是 a_n 的因子)。

应用: 对多项式 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$ ($a_3 = 2, a_0 = 6$), 有理根可能为 $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}$; 试 $x = 3$ 得 $f(3) = 0$, 故 $x - 3$ 是因式, 再用简化待定系数法分解即可。

有理根定理可快速锁定试根范围, 是高次式分解的核心高效工具。

1.11 作业: 单变量的因式分解

哈尔滨市第三中学, 29-30 秋季学期, 初高中衔接——代数部分 A, 作业 4

这里写作业说明

习题 1 利用求根公式分解因式。

1. $x^2 - 6x + 9$;
2. $x^2 - 6x + 8$;
3. $x^2 - 6x + 7$;
4. $2x^2 - 6x + 8$;
5. $4x^2 - 8x - 5$ 。

习题 2 利用十字相乘分解因式。

1. $x^2 - 7x + 6$;
2. $x^2 - x - 2$;
3. $-x^2 + 8x - 15$;
4. $2x^2 - 3x + 5$;
5. $7x^2 - 8x - 12$ 。

习题 3 利用试根法分解因式。

1. $x^3 - 4x$;
2. $x^3 - 1$;
3. $x^3 - 27$;
4. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$;
5. $x^3 - 2x^2 - x - 2$;

$$6. x^3 - x^2 - 2x - 12;$$

$$7. x^3 + 3x^2 - 9x + 5.$$

习题 4 分解因式。

$$1. x^4 - 9x^2 + 10;$$

$$2. (x^2 + 4x + 8)^2 + 3(x^2 + 4x + 8) + 2;$$

$$3. (x+1)(x+2)(x+3)(x+4) + 1;$$

$$4. (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) - 24;$$

$$5. x^2 - 6xy + 8y^2;$$

$$6. 4(x+5)(x+6)(x+10)(x+12) - 3x^2;$$

$$7. x^4 + x^2 + 1;$$

$$8. x^3 - (2 - \sqrt{3})x^2 + \sqrt{3}x + 3 - 2\sqrt{3};$$

$$9. x^3 + (\sqrt{3} - 1)x^2 + (2\sqrt{3} - 2)x + 3 - 2\sqrt{3}.$$

1.12 多变量的因式分解

问题：能否根据主元思想对多变量的多项式进行因式分解？

重要的因式分解公式

以下是高中数学中常用的因式分解公式：

1. 平方差公式：

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

2. 立方差公式：

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

3. 一般差幂公式 (n 为正整数)：

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

4. 立方和公式：

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

5. 一般和幂公式 (n 为奇数)：

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1})$$

6. 完全立方和公式：

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

7. 完全立方公式:

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

8. 三项和的平方公式:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

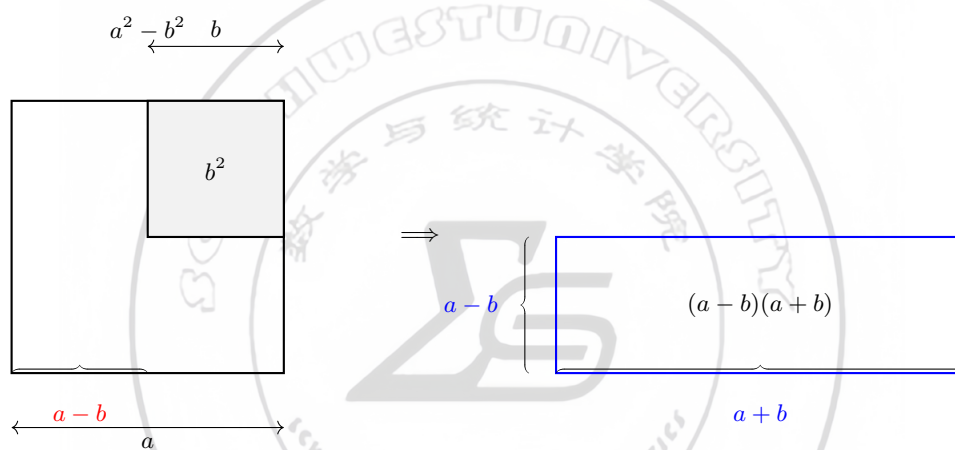
9. 立方和补项公式:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$$

我们利用面积法和体积法对部分公式给出可视化证明

平方差公式 (面积法):

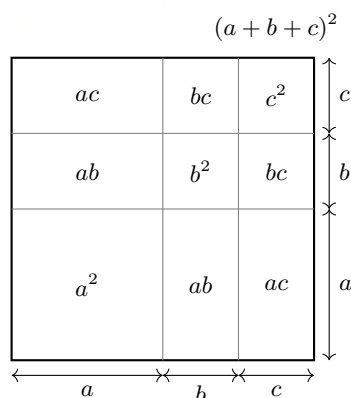
平方差公式 $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ 的几何意义是“大正方形面积减小正方形面积，剩余部分可拼接为矩形”:



证明: 边长为 a 的大正方形挖去边长为 b 的小正方形后, 剩余区域可拼接为长 $a + b$ 、宽 $a - b$ 的矩形, 面积相等, 故 $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ 。

三项和的平方公式 (面积法):

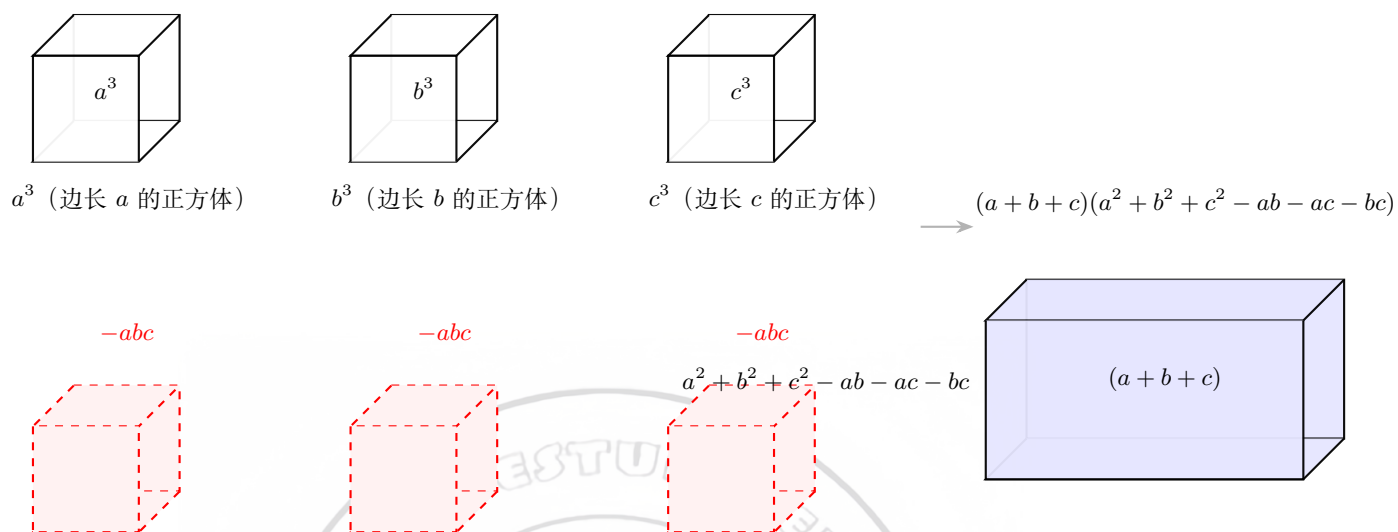
公式 $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$ 对应“边长为 $a + b + c$ 的大正方形的面积分割”:



证明: 大正方形被分割为 3 个小正方形 (面积 a^2, b^2, c^2) 和 6 个矩形 (面积 ab, ac, ba, bc, ca, cb , 即 $2ab + 2ac + 2bc$), 总面积等于各部分面积之和。

立方和补项公式 (体积法):

公式 $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$ 的几何意义是 “三个正方体体积减去 3 个长方体体积, 剩余部分可组合为新长方体”:



证明: 三个正方体的体积和, 减去 3 个边长为 a, b, c 的长方体体积后, 剩余区域可拼接为长 $a + b + c$ 、截面面积为 $a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc$ 的长方体, 体积相等, 故公式成立。

1.13 作业: 多变量的因式分解

哈尔滨市第三中学, 29-30 秋季学期, 初高中衔接——代数部分 A, 作业 5

这里写作业说明

习题 1 分解因式:

- $9x^5 - 72x^2y^3$
- $a^6 + b^6$
- $a^6 - b^6$
- $9x^2 - 24xy + 16y^2$
- $4a^2 + 9b^2 + 9c^2 - 18bc - 12ac + 12ab$
- $a^8 - b^8$
- $(p+q)^3 - 3(p+q)^2(p-q) + 3(p+q)(p-q)^2 - (p-q)^3$
- $(a+x)^4 - (a-x)^4$

习题 2 利用主元法分解因式：

1. $x^2 + 2xy - 3y^2 + 3x + y + 2$
2. $x^2 - y^2 + 5x + 3y + 4$
3. $x^2 - 6xy + 9y^2 - 5xz + 15yz + 6z^2$
4. $x^2 + kx + 2x - k - 3$
5. $a^2b - ab^2 + a^2c - ac^2 - 3abc + b^2c + bc^2$
6. $9a^2 + x^{2n} + 6a + 1 + 2x^n + 6ax^n$

习题 3 分解因式：

$$x^2(y - z) + y^2(z - x) + z^2(y - x)$$

习题 4 当 m 为何值时， $x^2 + 7xy - 18y^2 - 5x + my - 24$ 可以分解为两个一次因式的乘积？

1.14 二次方程

韦达定理

设二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 有两个实根 x_1, x_2 ，那么根据因式定理，我们知道 $x - x_1, x - x_2$ 一定是二次式 $ax^2 + bx + c$ 的两个因式，所以

$$ax^2 + bx + c = d(x - x_1)(x - x_2).$$

这里 d 是一个常数。比较二次项系数，右侧为 dx^2 ，左侧为 ax^2 ，所以 $d = a$ 。因此

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

将右侧的括号展开，得到

$$ax^2 + bx + c = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2.$$

由于这个式子对于任意的 x 成立，对应的系数必然相等，所以

$$-a(x_1 + x_2) = b, \quad ax_1x_2 = c.$$

即：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \\ x_1x_2 = \frac{c}{a}. \end{cases}$$

这就是所谓的韦达定理，也称根系关系。

判别式的意义

在我们熟悉了根系关系后,能不能从它的角度来理解判别式呢?事实上,如果我们将 $b = -a(x_1 + x_2)$, $c = ax_1x_2$ 代入到判别式中,我们可以得到:

$$\Delta = b^2 - 4ac = a^2(x_1 + x_2)^2 - 4a^2x_1x_2 = a^2(x_1 - x_2)^2.$$

所以,如果方程存在两个实根,必然有 $a^2(x_1 - x_2)^2 \geq 0$, 从而 $\Delta \geq 0$ 。这就是为什么我们可以使用判别式来判断二次方程是否有实根。

在计算二次函数零点间的距离时,我们也可以利用这个公式。两边开方,得到

$$|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}.$$

1.15 作业: 二次方程

哈尔滨市第三中学, 29-30 秋季学期, 初高中衔接——代数部分 A, 作业 6

这里写作业说明

习题 1 已知 m, n 是有理数, 方程 $x^2 + mx + n = 0$ 的有一个根是 $\sqrt{5} - 2$, 求 m, n 。

习题 2 不代入, 化简求值:

1. 已知 $a = \sqrt{7} - 1$, 求 $3a^3 + 12a^2 - 6a - 12$ 的值;
2. 若 $a^2 - 3a + 1 = 0$, 求 $3a^3 - 8a^2 + a + \frac{3}{a^2 + 1}$ 的值;

习题 3 设 x_1, x_2 分别是方程 $x^2 + 3x + 1 = 0$ 的两根。不解方程, 求:

1. $x_1 + x_2$;
2. x_1x_2 ;
3. $x_1^2 + x_2^2$;
4. $x_1^3 + x_2^3$;
5. $x_1^2x_2 + x_1x_2^2$;
6. $x_1^6 + x_2^6$;

习题 4 利用根系关系求解。

1. 已知 b, c 为方程 $x^2 + bx + c = 0$ 的两个不同实根, 求 b, c ;
2. 设关于 x 的方程 $x^2 + 5x + b = 0$ 的两个实数根为 x_1, x_2 , 且 $|x_1 - x_2| = 3$ 。求实数 b 的值;
3. 设 x_1, x_2 是方程 $x^2 - 2(k+1)x + k^2 + 2 = 0$ 的两个实数根, 且 $(x_1 + 1)(x_2 + 1) = 8$ 。求 k 的值;

4. 已知 x_1, x_2 是方程 $x^2 - 2mx + (m^2 + 2m + 3) = 0$ 的两个实数根, 求 $x_1^2 + x_2^2$ 的最小值;
5. 已知 $6a^2 - 100a + 7 = 0$, $7b^2 - 100b + 6 = 0$, 且 $ab \neq 1$, 求 $\frac{a}{b}$ 的值。
6. 已知 x_1, x_2 是方程 $x^2 - 6x + 3 = 0$ 的两个根, 试作一个以 x_1^2, x_2^2 为根的二次方程。

习题 5 已知方程 $x^2 + (2k - 1)x - k + 1 = 0$.

1. 当 k 为何值时, 方程有一根为正、一根为负?
2. 当 k 为何值时, 方程两根都为正数?
3. 当 k 为何值时, 方程一根大于 1、一根小于 1?
4. 当 k 为何值时, 方程两根均大于 1?

习题 6 如果方程 $(x - 1)(x^2 - 2x + m) = 0$ 的三根可以作为一个三角形的三边长, 求实数 m 的取值范围。

习题 7 设 a, b 是一元二次方程 $x^2 - x - 1 = 0$ 的两根, 求:

1. $3a^3 + 4b + \frac{2}{a^2}$;
2. $a^4 + 3b$ 。

1.16 关于代数部分 A 习题课的教案: 基础代数公式, 韦达定理, 对称式与同构式, 十字相乘、双十字相乘、换元法、主元法、大除法等因式分解方法在高考数学中的应用

我们组织了以下习题作为**代数部分 A** 这一部分的复习使用。

习题 1 公式回顾 (因式分解与代数展开核心公式):

1. 平方差公式: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
2. 立方差公式: $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
3. 立方和公式: $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
4. 完全平方公式: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
5. 三数和的平方公式: $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$
6. 完全立方公式: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

习题 2 韦达定理 (根系关系推导):

1. 二次方程韦达定理: 对于 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$), 设两根为 x_1, x_2 , 由因式定理得:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2$$

比较系数得根系关系:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

其中判别式 $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ 时方程有实根。

2. 三次方程韦达定理：对于 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ($a \neq 0$)，设三根为 x_1, x_2, x_3 ，由因式定理得：

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = ax^3 - a(x_1+x_2+x_3)x^2 + a(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x - ax_1x_2x_3$$

比较系数得根系关系：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a} \\ x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a} \end{cases}$$

习题 3 对称式与同构式练习：

1. 韦达定理基础应用：已知 x_1, x_2 是方程 $x^2 + 2x - 5 = 0$ 的两根，求下列各式的值（韦达定理： $x_1 + x_2 = -2$, $x_1x_2 = -5$ ）：

$$(1) \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \frac{2}{5}$$

$$(2) x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 14$$

$$(3) (x_1 - 5)(x_2 - 5) = x_1x_2 - 5(x_1 + x_2) + 25 = 30$$

$$(4) |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = 2\sqrt{6}$$

2. 同构式求解：已知 $m^2 - 3m - 1 = 0$, $n^2 - 3n - 1 = 0$ ($m \neq n$)，求 $\frac{n}{m} + \frac{m}{n}$ 的值：由同构性知 m, n 是 $x^2 - 3x - 1 = 0$ 的两根，故 $m + n = 3$, $mn = -1$ ，代入得：

$$\frac{n}{m} + \frac{m}{n} = \frac{(m+n)^2 - 2mn}{mn} = -11$$

3. 分式立方和求解：已知 $x^2 - 3x + 1 = 0$ ，求 $x^3 + \frac{1}{x^3}$ 的值：由方程得 $x + \frac{1}{x} = 3$ ，代入立方和公式得：

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right) \left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2}\right) = 3 \times (9 - 2 - 1) = 18$$

习题 4 因式分解在高考中的应用（常用方法：十字相乘、双十字相乘、换元法、大除法）：

分解下列各式：

1. $x^2 + 5x - 24 = (x + 8)(x - 3)$ （十字相乘）；

2. $-6x^2 - 5x + 4 = -(2x - 1)(3x + 4)$ （十字相乘）；

3. $x^2 - 14x - 312 = (x + 12)(x - 26)$ （十字相乘）；

4. $(x^2 + x)^2 - 8(x^2 + x) + 12 = (x + 2)(x - 1)(x + 3)(x - 2)$ （换元法）；

5. $5x^2 + 6xy - 8y^2 = (5x - 4y)(x + 2y)$ （主元法）；

6. $4k^2 + 8km + 3m^2 - 2m - 1 = (2k + 3m + 1)(2k + m - 1)$ （双十字相乘）；

7. $x^2 + xy - 6y^2 + x + 13y - 6 = (x + 3y - 2)(x - 2y + 3)$ （双十字相乘）；

8. $6x^2 - 13xy + 2y^2 + 16x + y - 6 = (6x - y + 2)(x - 2y - 3)$ （双十字相乘）；

9. $9x^3 - 3x^2 + 4 = (3x + 2)(3x^2 - 3x + 2)$ （大除法）；

10. $x^3 + 7x^2 + 14x + 8 = (x + 1)(x + 2)(x + 4)$ （大除法）。

2 初高中衔接——代数部分 B

2.1 高中常见不等式的解法

一元二次不等式

先补充区间的概念：

- 满足 $a < x < b$ 的实数 x 构成的集合，记为 (a, b) (开区间)；
- 满足 $a \leq x < b$ 的实数 x 构成的集合，记为 $[a, b)$ (左闭右开区间)；
- 满足 $a < x \leq b$ 的实数 x 构成的集合，记为 $(a, b]$ (左开右闭区间)；
- 满足 $a \leq x \leq b$ 的实数 x 构成的集合，记为 $[a, b]$ (闭区间)；
- 满足 $a > 2$ 的实数 x 构成的集合，记为 $(a, +\infty)$ ；
- 满足 $a < 2$ 的实数 x 构成的集合，记为 $(-\infty, a)$ 。

例 不等式 $2x^2 + 5x - 12 < 0$ 的解集为

- A. $(-\infty, -4) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$
- B. $\left(-4, \frac{3}{2}\right)$
- C. $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup (4, +\infty)$
- D. $\left(-\frac{3}{2}, 4\right)$

解题过程：第一步，解对应一元二次方程 $2x^2 + 5x - 12 = 0$ ；因式分解得 $(2x - 3)(x + 4) = 0$ ，解得根为 $x = -4$ 或 $x = \frac{3}{2}$ ；第二步，根据二次项系数 $2 > 0$ (抛物线开口向上)，“小于零取中间”，得解集 $-4 < x < \frac{3}{2}$ ，即 $\left(-4, \frac{3}{2}\right)$ 。答案：B

例 不等式 $-3x^2 - 2x + 1 < 0$ 的解集为

- A. $\left\{x \mid -1 < x < \frac{1}{3}\right\}$
- B. $\left\{x \mid -\frac{1}{3} < x < 1\right\}$
- C. $\left\{x \mid x < -1 \text{ 或 } x > \frac{1}{3}\right\}$
- D. $\left\{x \mid x < -\frac{1}{3} \text{ 或 } x > 1\right\}$

解题过程：第一步，将二次项系数化为正：两边同乘 -1 ，不等号变向，得 $3x^2 + 2x - 1 > 0$ ；第二步，解对应方程 $3x^2 + 2x - 1 = 0$ ，因式分解得 $(-3x + 1)(x + 1) = 0$ （或 $3(x + 1)\left(x - \frac{1}{3}\right) = 0$ ），解得根为 $x = -1$ 或 $x = \frac{1}{3}$ ；第三步，根据二次项系数 $3 > 0$ （开口向上），“大于零取两边”，得解集 $x < -1$ 或 $x > \frac{1}{3}$ ，即 $(-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$ 。答案：C

例 若关于 x 的不等式 $x^2 + (a + 1)x + ab > 0$ 的解集为 $\{x \mid x \neq 1\}$ ，则 ab 的值为

解题过程：由解集 $\{x \mid x \neq 1\}$ 可知，对应一元二次方程 $x^2 + (a + 1)x + ab = 0$ 有两个相等实根 $x = 1$ ；根据韦达定理：- 根的和： $1 + 1 = -(a + 1)$ ，解得 $a = -3$ ；- 根的积： $1 \times 1 = ab$ ，代入 $a = -3$ ，得 $b = -\frac{1}{3}$ ；因此 $ab = (-3) \times \left(-\frac{1}{3}\right) = 1$ 。答案：1

例 当 $x \in \mathbb{R}$ 时，不等式 $kx^2 - kx + 2 > 0$ 恒成立，则 k 的取值范围是

- A. $(-\infty, 0) \cup (8, +\infty)$
- B. $[0, +\infty)$
- C. $(0, 8)$
- D. $[0, 8)$

解题过程：分两种情况讨论：1. 当 $k = 0$ 时，不等式化为 $2 > 0$ ，恒成立；2. 当 $k \neq 0$ 时，需满足“二次函数开口向上且判别式 $\Delta < 0$ ”：- 开口向上： $k > 0$ ；- 判别式 $\Delta = (-k)^2 - 4 \cdot k \cdot 2 = k^2 - 8k < 0$ ，解得 $0 < k < 8$ ；综上， k 的取值范围是 $[0, 8)$ 。答案：D

例 不等式 $x^2 - 2x + c < 0$ 的解集为 $(m, m + 6)$ ，则 c 的值为

解题过程：设对应方程 $x^2 - 2x + c = 0$ 的两根为 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$)，则解集为 (x_1, x_2) ，且 $x_2 - x_1 = 6$ ；根据韦达定理：- 根的和： $x_1 + x_2 = 2$ ；- 根的积： $x_1 x_2 = c$ ；由 $(x_2 - x_1)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2$ ，代入得 $6^2 = 2^2 - 4c$ ；化简： $36 = 4 - 4c$ ，解得 $c = -8$ 。答案：-8

例 不等式 $ax^2 - (a + 2)x + 2 \geq 0$ ($a < 0$) 的解集为

- A. $\left[\frac{2}{a}, 1\right]$
- B. $\left[1, \frac{1}{a}\right]$
- C. $\left(-\infty, \frac{2}{a}\right] \cup [1, +\infty)$
- D. $(-\infty, 1] \cup \left[\frac{2}{a}, +\infty\right)$

解题过程：第一步，解对应方程 $ax^2 - (a + 2)x + 2 = 0$ ，因式分解得 $(ax - 2)(x - 1) = 0$ ，解得根为 $x = \frac{2}{a}$ 或 $x = 1$ ；第二步，因 $a < 0$ ，故 $\frac{2}{a} < 0 < 1$ ，且二次函数开口向下；“大于等于零取两边”，得解集 $x \leq \frac{2}{a}$ 或 $x \geq 1$ ，即 $\left(-\infty, \frac{2}{a}\right] \cup [1, +\infty)$ 。答案：C

分式不等式

分式不等式的核心是等价转化:

- $\frac{f(x)}{g(x)} < 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot g(x) < 0$ (分母不为零);
- $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot g(x) \geq 0$ 且 $g(x) \neq 0$.

例 解不等式 $\frac{x+3}{x-1} < 0$

解题过程: 等价转化为 $(x+3)(x-1) < 0$; 解对应方程 $(x+3)(x-1) = 0$, 得根 $x = -3$ 或 $x = 1$; “小于零取中间”, 解集为 $-3 < x < 1$, 即 $(-3, 1)$ 。答案: $(-3, 1)$

例 不等式 $\frac{3x-1}{2-x} \geq 1$ 的解集是

- A. $\left\{x \mid \frac{3}{4} \leq x \leq 2\right\}$
B. $\left\{x \mid \frac{3}{4} \leq x < 2\right\}$
C. $\left\{x \mid x > 2 \text{ 或 } x \leq \frac{3}{4}\right\}$
D. $\left\{x \mid x \geq \frac{3}{4}\right\}$

解题过程: 第一步, 移项化为标准形式: $\frac{3x-1}{2-x} - 1 \geq 0$; 通分计算: $\frac{3x-1-(2-x)}{2-x} = \frac{4x-3}{2-x} \geq 0$; 第二步, 等价转化为 $(4x-3)(2-x) \geq 0$ 且 $2-x \neq 0$; 解对应方程 $(4x-3)(2-x) = 0$, 得根 $x = \frac{3}{4}$ 或 $x = 2$; “大于等于零取两边” 且排除 $x = 2$, 解集为 $\frac{3}{4} \leq x < 2$ 。答案: B

例 解不等式 $-1 \leq \frac{2x-1}{3x+2} \leq 1$

解题过程: 拆分为两个不等式组, 且注意分母 $3x+2 \neq 0$ (即 $x \neq -\frac{2}{3}$):

1. 解 $\frac{2x-1}{3x+2} \geq -1$: 移项通分: $\frac{2x-1+3x+2}{3x+2} \geq 0 \Rightarrow \frac{5x+1}{3x+2} \geq 0$; 等价于 $(5x+1)(3x+2) \geq 0$, 解得 $x \leq -\frac{2}{3}$ 或 $x \geq -\frac{1}{5}$;

2. 解 $\frac{2x-1}{3x+2} \leq 1$: 移项通分: $\frac{2x-1-3x-2}{3x+2} \leq 0 \Rightarrow \frac{-x-3}{3x+2} \leq 0$; 等价于 $(-x-3)(3x+2) \leq 0$ (或 $(x+3)(3x+2) \geq 0$), 解得 $x \leq -3$ 或 $x \geq -\frac{2}{3}$;

3. 取交集并排除 $x = -\frac{2}{3}$: 最终解集为 $x \leq -3$ 或 $x \geq -\frac{1}{5}$ 。答案: $(-\infty, -3] \cup \left[-\frac{1}{5}, +\infty\right)$

高次不等式

高次不等式核心解法：穿根法

口诀：“从上往下穿，从右往左穿，奇穿偶不穿”，步骤：

1. 将高次多项式因式分解，化为一次因式乘积形式；
2. 使各一次因式的一次项系数为正；
3. 在数轴上标出所有根，按从小到大排序；
4. 从最右侧根的上方开始画曲线，依次穿过根（奇次幂穿，偶次幂不穿）；
5. 根据不等号方向，取曲线对应区间。

例 解下列不等式

1. $(x-1)(x-2)(x-3) > 0$

2. $(x+2)^2(x-3)(x-2) \geq 0$

3. $(x+1)^3(x-1)^2(6-x) \leq 0$

4. $\frac{x^3-1}{(x-2)(x-3)} \leq 0$

5. $\frac{x^2-x-4}{x-1} \geq 1$

6. $x-2 > \frac{3}{x}$

解题过程：1. $(x-1)(x-2)(x-3) > 0$: 根为 1, 2, 3, 穿根后“大于零取上方”，解集为 $1 < x < 2$ 或 $x > 3$ 。答案： $(1, 2) \cup (3, +\infty)$

2. $(x+2)^2(x-3)(x-2) \geq 0$: 根为 $x = -2$ （偶次幂，不穿）、2, 3, 穿根后“大于等于零取上方及根”，解集为 $x \leq 2$ 或 $x \geq 3$ （含 $x = -2$ ）。答案： $(-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$

3. $(x+1)^3(x-1)^2(6-x) \leq 0$: 整理为 $-(x+1)^3(x-1)^2(x-6) \leq 0$ （系数化为正： $(x+1)^3(x-1)^2(x-6) \geq 0$ ）；根为 $x = -1$ （奇次幂，穿）、1（偶次幂，不穿）、6, 穿根后“大于等于零取上方及根”，解集为 $x \geq -1$ 且 $x \neq 1$ 或 $x = 6$ 。答案： $[-1, 1) \cup (1, +\infty)$

4. $\frac{x^3-1}{(x-2)(x-3)} \leq 0$: 因式分解 $x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$ ($x^2+x+1 > 0$ 恒成立)，等价于 $\frac{x-1}{(x-2)(x-3)} \leq 0$; 等价于 $(x-1)(x-2)(x-3) \leq 0$ 且 $x \neq 2, 3$, 穿根后解集为 $x \leq 1$ 或 $2 < x < 3$ 。答案： $(-\infty, 1] \cup (2, 3)$

5. $\frac{x^2-x-4}{x-1} \geq 1$: 移项通分: $\frac{x^2-x-4-(x-1)}{x-1} = \frac{x^2-2x-3}{x-1} \geq 0$; 因式分解: $\frac{(x+1)(x-3)}{x-1} \geq 0$, 等价于 $(x+1)(x-1)(x-3) \geq 0$ 且 $x \neq 1$; 穿根后解集为 $-1 \leq x < 1$ 或 $x \geq 3$ 。答案： $[-1, 1) \cup [3, +\infty)$

6. $x-2 > \frac{3}{x}$: 移项通分: $\frac{x(x-2)-3}{x} = \frac{x^2-2x-3}{x} > 0$; 因式分解: $\frac{(x+1)(x-3)}{x} > 0$, 等价于 $x(x+1)(x-3) > 0$; 穿根后解集为 $-1 < x < 0$ 或 $x > 3$ 。答案： $(-1, 0) \cup (3, +\infty)$

例 已知 $ax-b > 0$ 的解集为 $(-\infty, 2)$, 关于 x 的不等式 $\frac{ax+b}{x^2-5x-6} \geq 0$ 的解集为

A. $(-\infty, -2] \cup (-1, 6)$

B. $(-\infty, -2] \cup (6, +\infty)$

C. $[-2, -1) \cup (-1, 6)$

D. $[-2, -1) \cup (6, +\infty)$

解题过程: 由 $ax-b > 0$ 解集为 $(-\infty, 2)$, 得 $a < 0$ 且 $b = 2a$; 代入目标不等式: $\frac{a(x+2)}{(x-6)(x+1)} \geq 0$ (因式分解 $x^2 - 5x - 6 = (x-6)(x+1)$); 因 $a < 0$, 不等号变向: $\frac{x+2}{(x-6)(x+1)} \leq 0$, 等价于 $(x+2)(x+1)(x-6) \leq 0$ 且 $x \neq -1, 6$; 穿根后解集为 $x \leq -2$ 或 $-1 < x < 6$ 。答案: A

绝对值不等式

绝对值不等式的核心是等价转化:

- $|f(x)| \leq g(x) \Leftrightarrow -g(x) \leq f(x) \leq g(x)$ (需 $g(x) \geq 0$);
- $|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x)$ 或 $f(x) < -g(x)$;
- $|f(x)| \leq |g(x)| \Leftrightarrow f(x)^2 \leq g(x)^2$ 。

例 解下列不等式

1. $|x-2| < 9$

2. $|3x-4| > 5$

解题过程: 1. $|x-2| < 9$: 等价于 $-9 < x-2 < 9$, 解得 $-7 < x < 11$ 。答案: $(-7, 11)$
 2. $|3x-4| > 5$: 等价于 $3x-4 > 5$ 或 $3x-4 < -5$; 解得 $x > 3$ 或 $x < -\frac{1}{3}$ 。答案: $(-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (3, +\infty)$

例 不等式 $1 \leq |2x-1| < 2$ 的解集为

A. $\left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left(1, \frac{3}{2}\right)$

B. $\left(-\frac{1}{2}, 0\right] \cup \left[1, \frac{3}{2}\right)$

C. $\left(-\frac{1}{2}, 0\right] \cup \left[1, \frac{3}{2}\right]$

D. $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[1, \frac{3}{2}\right]$

解题过程: 拆分为两个不等式: 1. $|2x-1| \geq 1$: 等价于 $2x-1 \geq 1$ 或 $2x-1 \leq -1$, 解得 $x \geq 1$ 或 $x \leq 0$; 2. $|2x-1| < 2$: 等价于 $-2 < 2x-1 < 2$, 解得 $-\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$; 取交集得 $-\frac{1}{2} < x \leq 0$ 或 $1 \leq x < \frac{3}{2}$ 。答案: B

例, 2015 江苏卷 解不等式 $x + |2x + 3| \geq 2$

解题过程: 分情况讨论绝对值内表达式符号 (令 $2x + 3 = 0$, 得分界点 $x = -\frac{3}{2}$): 1. 当 $x \geq -\frac{3}{2}$ 时, $|2x + 3| = 2x + 3$, 不等式化为 $x + 2x + 3 \geq 2$, 解得 $x \geq -\frac{1}{3}$; 2. 当 $x < -\frac{3}{2}$ 时, $|2x + 3| = -2x - 3$, 不等式化为 $x - 2x - 3 \geq 2$, 解得 $x \leq -5$; 取交集得 $x \leq -5$ 或 $x \geq -\frac{1}{3}$ 。答案: $(-\infty, -5] \cup [-\frac{1}{3}, +\infty)$

无理不等式

先保证根号下表达式非负, 再根据不等号方向决定是否平方 (平方需两边非负)。

例 不等式 $(x - 2) \cdot \sqrt{x + 1} \geq 0$ 的解集是

解题过程: 需满足两个条件: 1. 根号下非负: $x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$; 2. 乘积非负: $(x - 2) \cdot \sqrt{x + 1} \geq 0$; - 当 $\sqrt{x + 1} = 0$ 时, $x = -1$, 乘积为 0, 满足; - 当 $\sqrt{x + 1} > 0$ 时 (即 $x > -1$), 需 $x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$; 综上, 解集为 $x = -1$ 或 $x \geq 2$ 。答案: $\{-1\} \cup [2, +\infty)$

例 解不等式 $\sqrt{3 - x} < x - 1$

解题过程: 需满足三个条件: 1. 根号下非负: $3 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 3$; 2. 右边非负 (平方需两边非负): $x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$; 3. 平方后不等号方向不变: $3 - x < (x - 1)^2$, 展开得 $x^2 - x - 2 > 0$, 因式分解得 $(x - 2)(x + 1) > 0$, 解得 $x > 2$ 或 $x < -1$; 取交集得 $2 < x \leq 3$ 。答案: $(2, 3]$

含参不等式的解法

按“二次项系数符号 $\rightarrow$ 判别式符号 $\rightarrow$ 根的大小”分类讨论, 确保不重不漏。

例 解关于 x 的不等式

1. $x^2 + (a + 2)x + 2a \leq 0$

2. $x^2 - (a^2 + a + 1)x + a^3 + a \geq 0$

解题过程: 1. $x^2 + (a + 2)x + 2a \leq 0$: 因式分解得 $(x + 2)(x + a) \leq 0$, 对应方程根为 $x = -2$ 或 $x = -a$; - 当 $a = 2$ 时, 根相等为 $x = -2$, 解集为 $\{-2\}$; - 当 $a > 2$ 时, $-a < -2$, “小于等于零取中间”, 解集为 $[-a, -2]$; - 当 $a < 2$ 时, $-a > -2$, 解集为 $[-2, -a]$ 。

2. $x^2 - (a^2 + a + 1)x + a^3 + a \geq 0$: 因式分解得 $[x - (a^2 + 1)](x - a) \geq 0$, 对应方程根为 $x = a^2 + 1$ 或 $x = a$; 因 $a^2 + 1 - a = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ (恒正), 故 $a^2 + 1 > a$; “大于等于零取两边”, 解集为 $(-\infty, a] \cup [a^2 + 1, +\infty)$ 。

例 解不等式 $ax^2 - 2(a + 1)x + 4 > 0$

解题过程: 分情况讨论: 1. 当 $a = 0$ 时, 不等式化为 $-2x + 4 > 0$, 解得 $x < 2$, 解集为 $(-\infty, 2)$; 2. 当 $a > 0$ 时, 因式分解得 $(ax - 2)(x - 2) > 0$, 对应方程根为 $x = \frac{2}{a}$ 或 $x = 2$; - 当 $a = 1$ 时, 根相等为 $x = 2$, 解集为 $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$; - 当 $a > 1$ 时, $\frac{2}{a} < 2$, “大于零取两边”, 解集为 $(-\infty, \frac{2}{a}) \cup (2, +\infty)$; - 当 $0 < a < 1$ 时, $\frac{2}{a} > 2$, 解集为 $(-\infty, 2) \cup (\frac{2}{a}, +\infty)$; 3. 当 $a < 0$ 时, 因

式分解得 $(ax-2)(x-2) > 0$ (系数化为正: $(x-\frac{2}{a})(x-2) < 0$); 因 $a < 0$, 故 $\frac{2}{a} < 2$, “小于零取中间”, 解集为 $(\frac{2}{a}, 2)$ 。

综上: $-a < 0$ 时, 解集为 $(\frac{2}{a}, 2)$; $-a = 0$ 时, 解集为 $(-\infty, 2)$; $-0 < a < 1$ 时, 解集为 $(-\infty, 2) \cup (\frac{2}{a}, +\infty)$; $-a = 1$ 时, 解集为 $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$; $-a > 1$ 时, 解集为 $(-\infty, \frac{2}{a}) \cup (2, +\infty)$ 。



2.2 高中常见函数图像的画法

本节内容来自赵礼显老师的总结，赫赫有名，超级重要。

画函数图像的方法：先奇偶，后单调，再极限。

对号函数

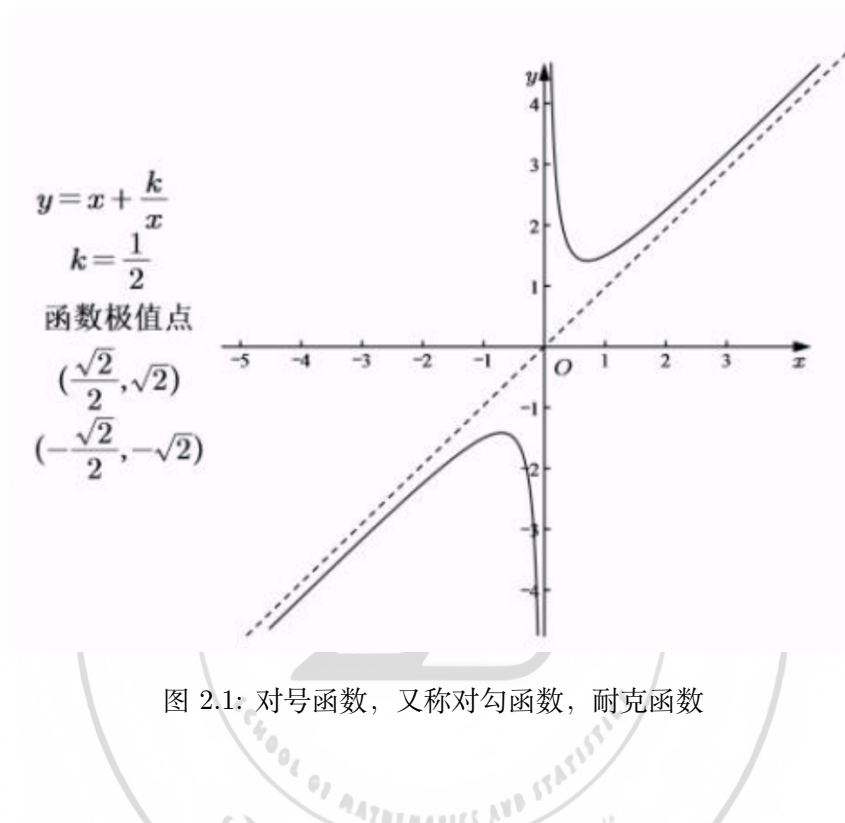


图 2.1: 对号函数，又称对勾函数，耐克函数

飘带函数

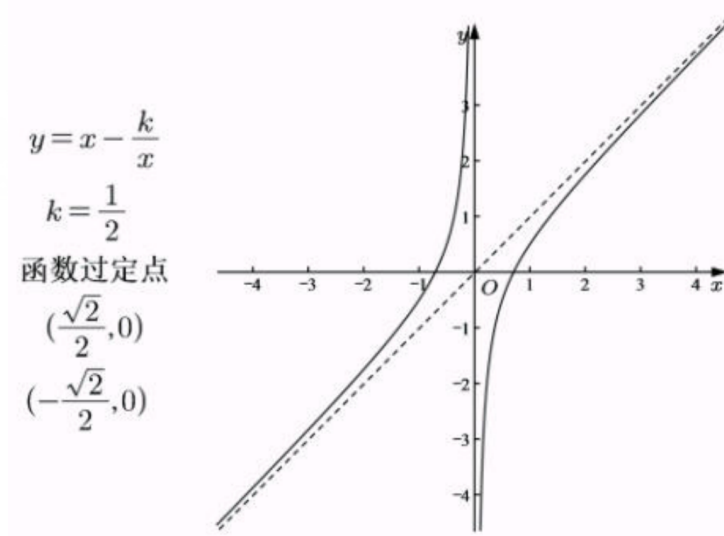


图 2.2: 飘带函数

双曲函数

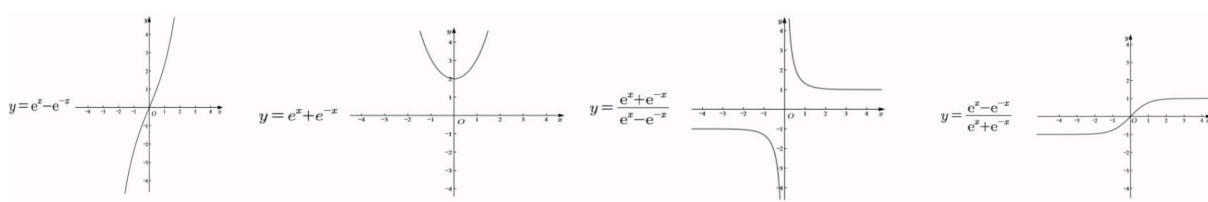


图 2.3: 从左到右: 双曲正弦, 双曲余弦, 双曲正切, 双曲余切函数

奇函数模型

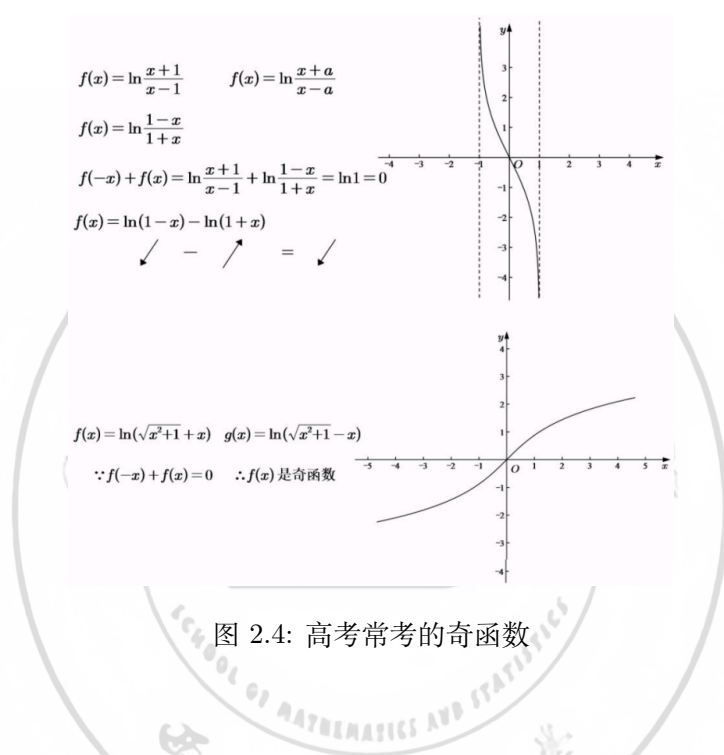


图 2.4: 高考常考的奇函数

绝对值函数

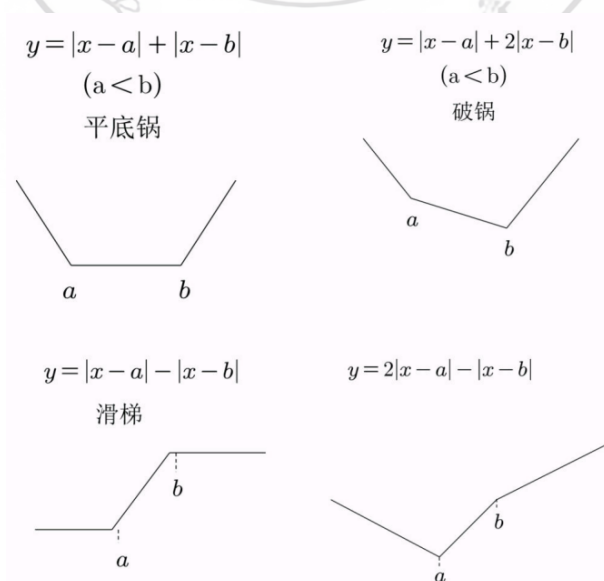


图 2.5: 绝对值函数

数论函数

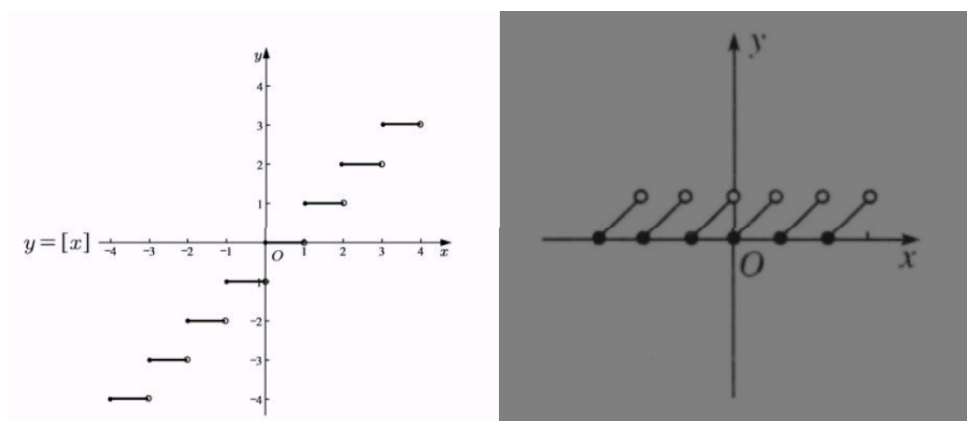


图 2.6: 从左到右: 高斯取整函数, 小数部分函数

曲线函数

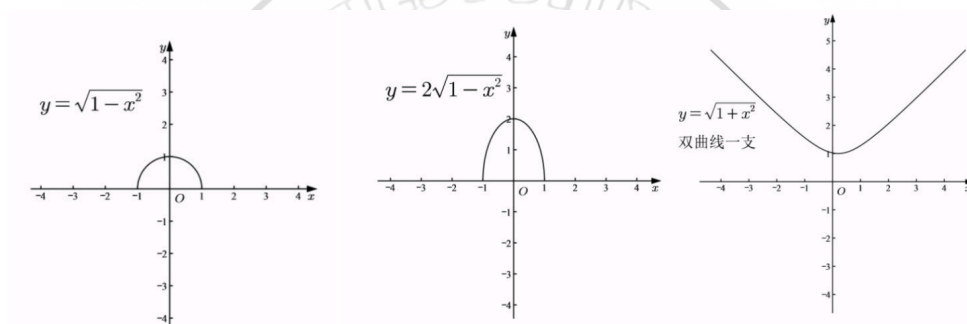


图 2.7: 从左到右: 半圆, 半椭圆, 半双曲线

一些重要的相切，不等式放缩，超越函数

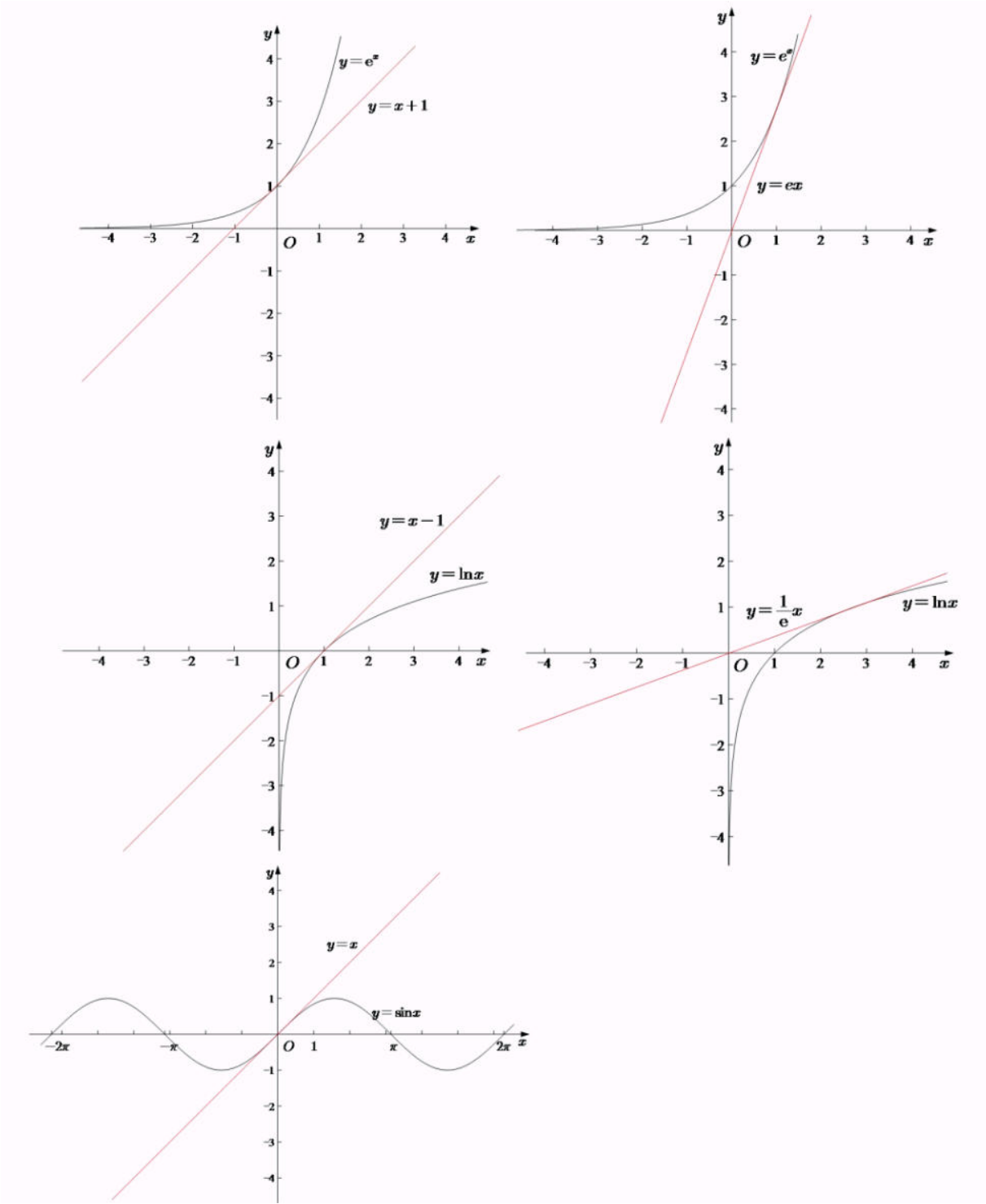


图 2.8: 一些重要的相切，不等式放缩，超越函数 1

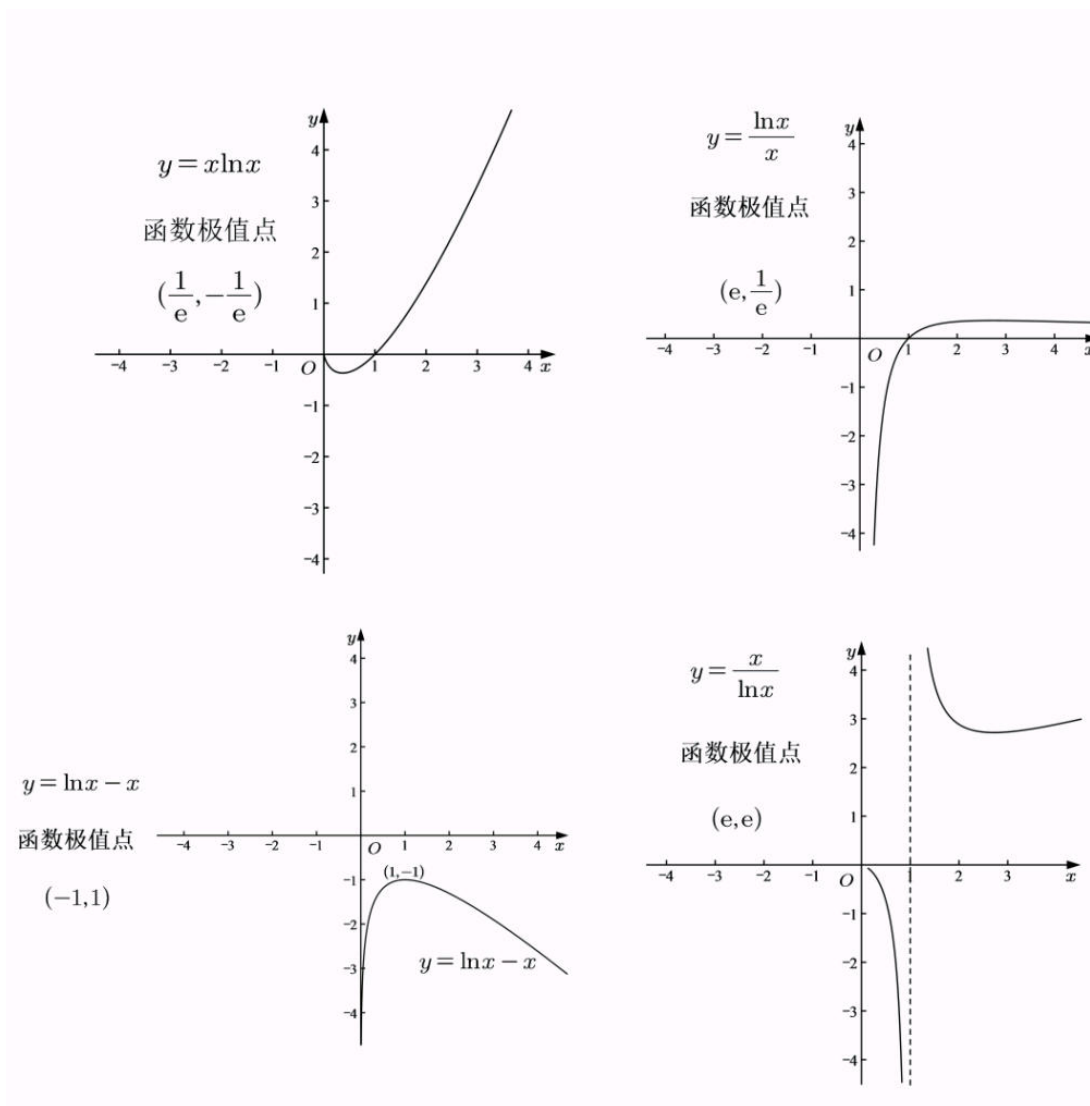


图 2.9: 一些重要的相切, 不等式放缩, 超越函数 2

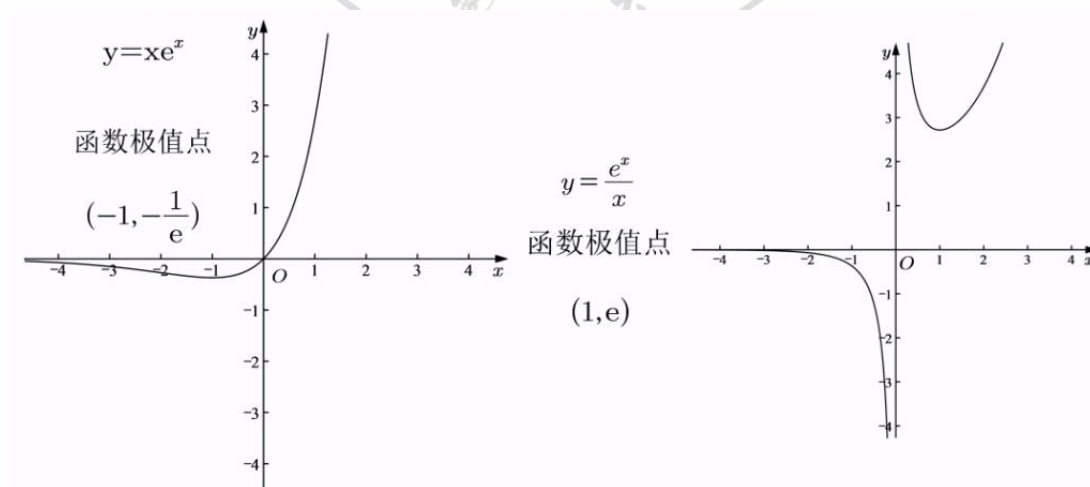


图 2.10: 一些重要的相切, 不等式放缩, 超越函数 3

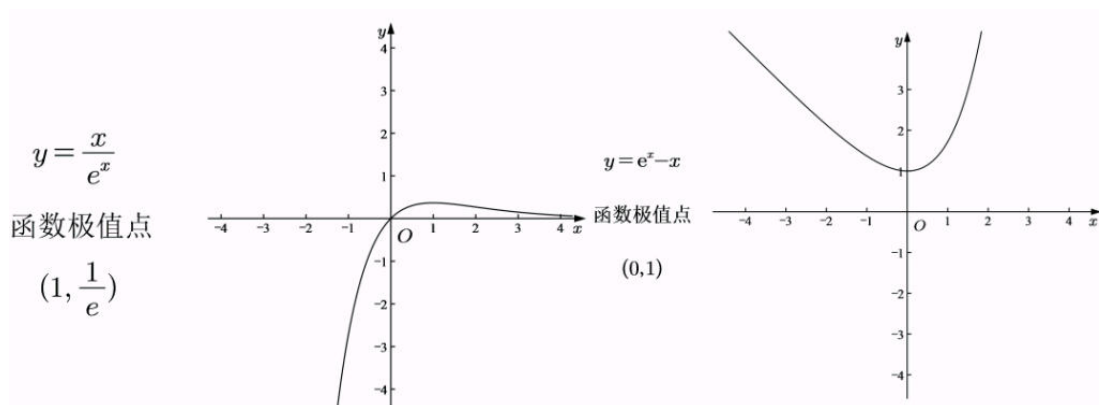


图 2.11: 一些重要的相切, 不等式放缩, 超越函数 4

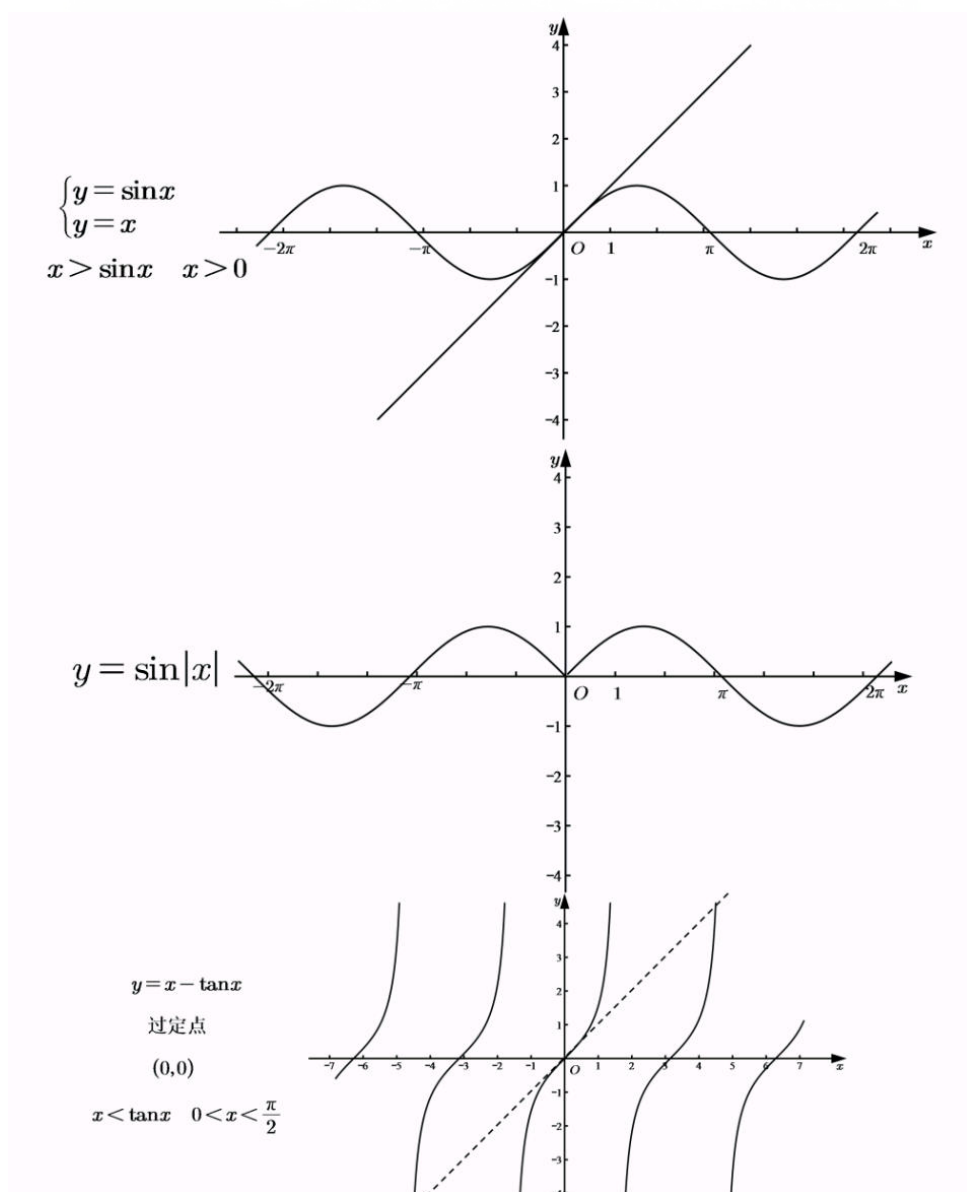


图 2.12: 一些重要的相切, 不等式放缩, 超越函数 5

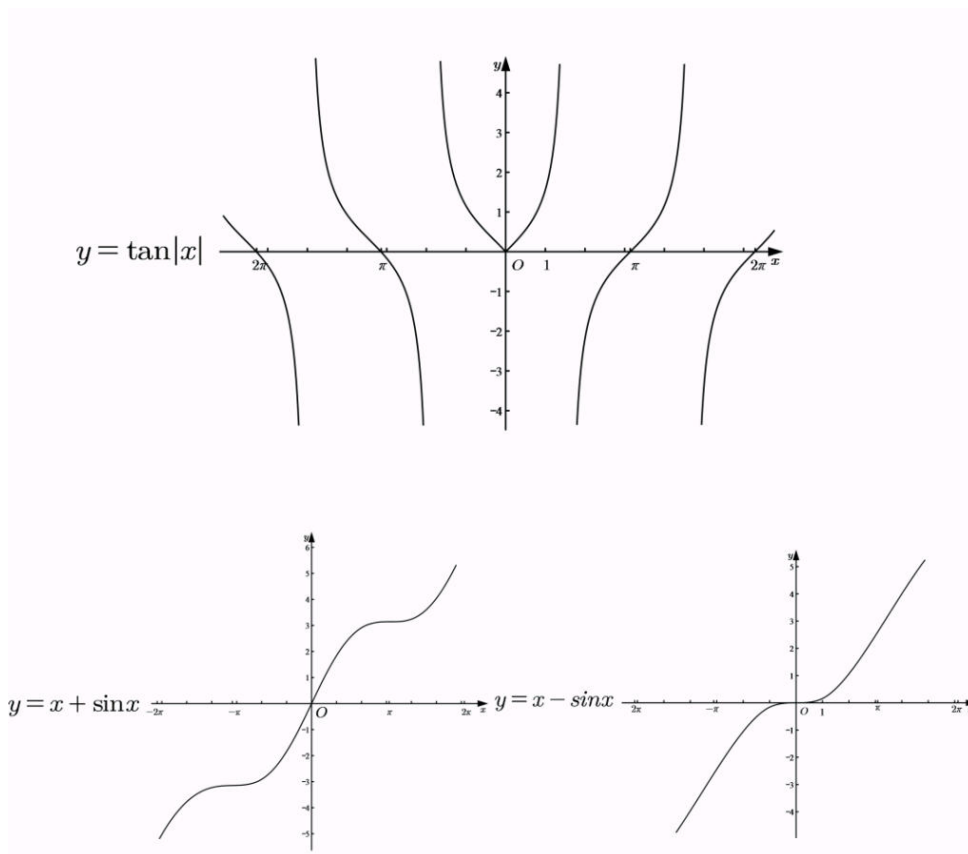


图 2.13: 一些重要的相切, 不等式放缩, 超越函数 6

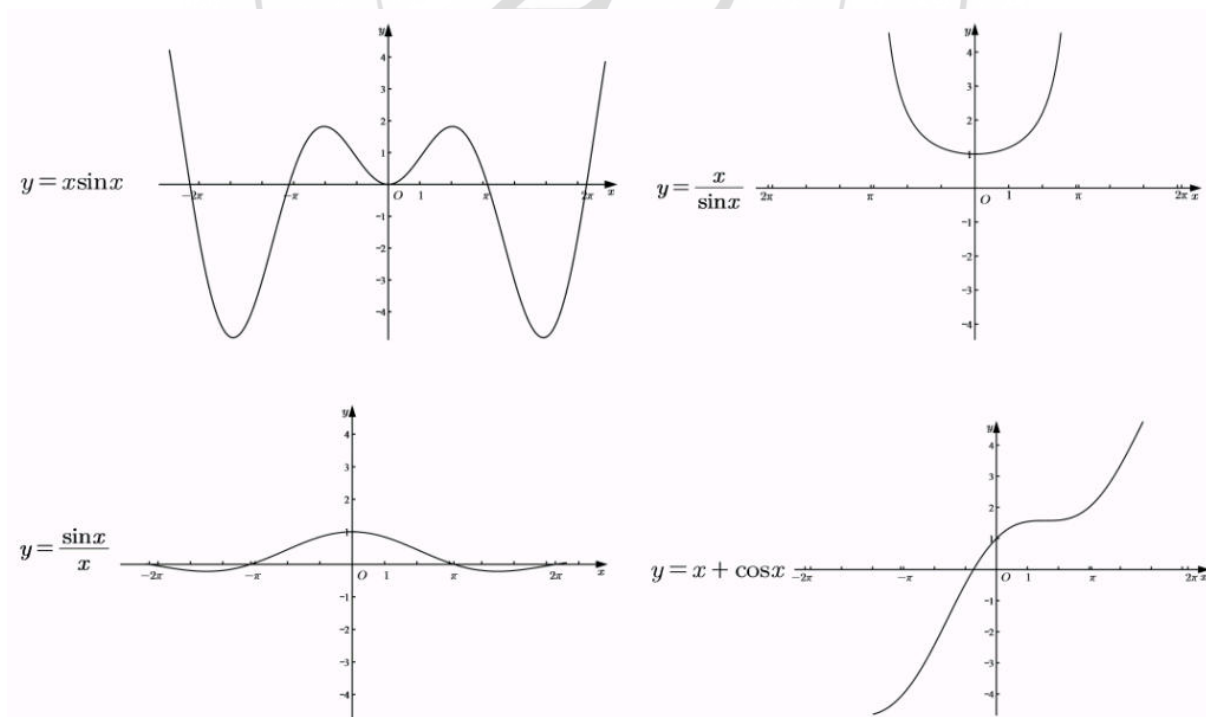


图 2.14: 一些重要的相切, 不等式放缩, 超越函数 7

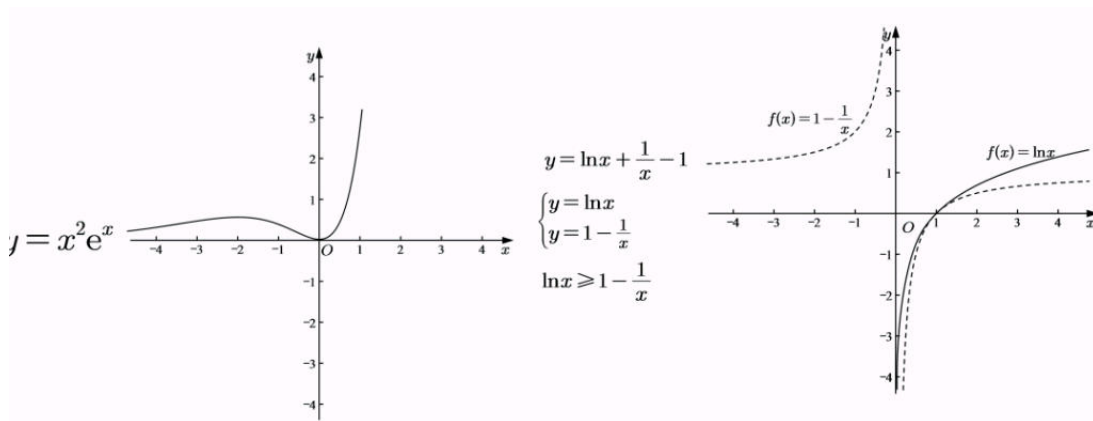


图 2.15: 一些重要的相切, 不等式放缩, 超越函数 8

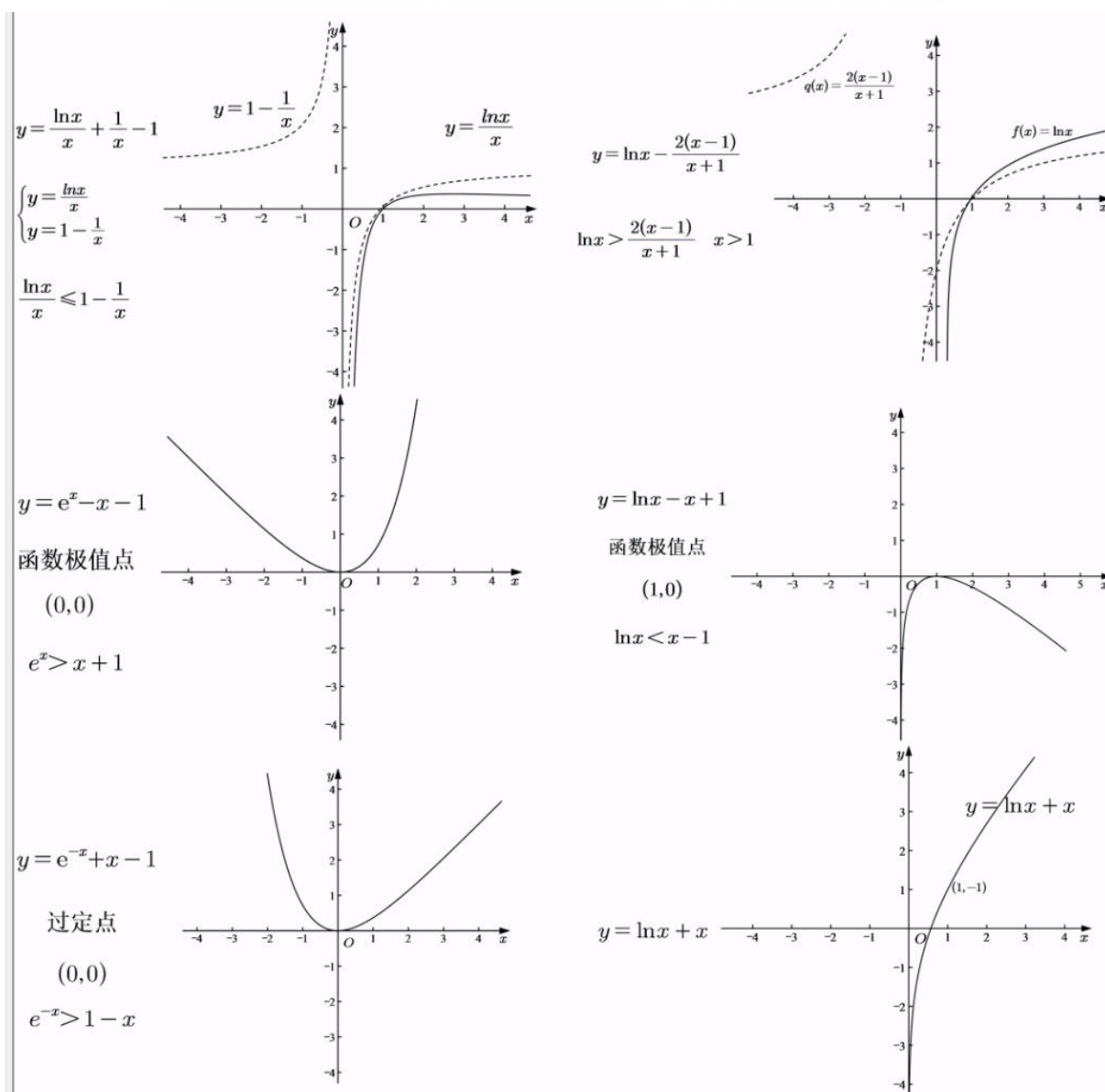


图 2.16: 一些重要的相切, 不等式放缩, 超越函数 9

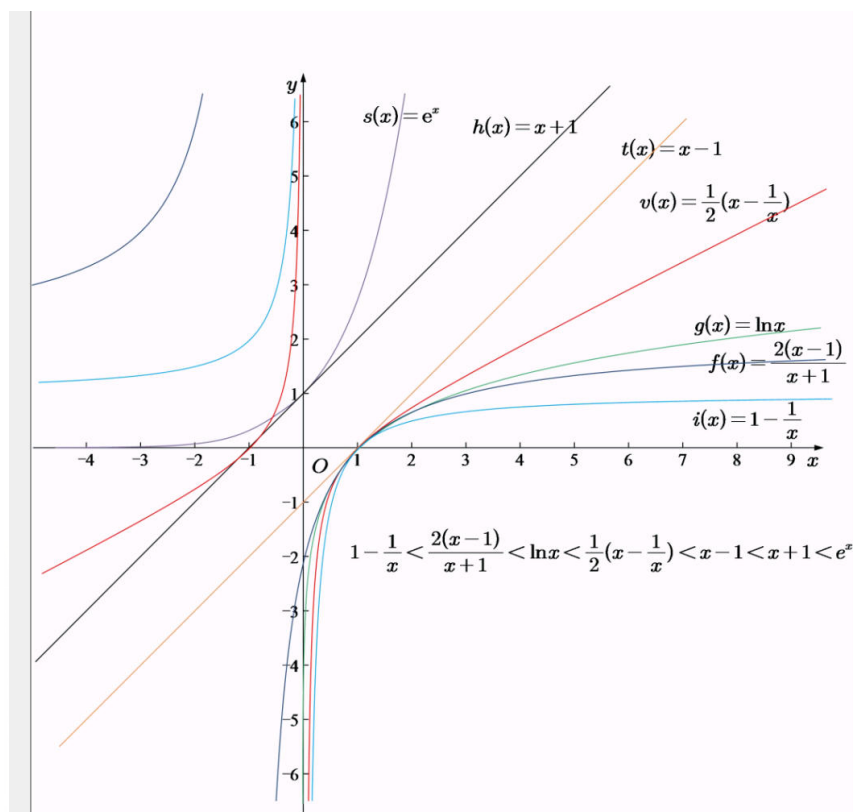


图 2.17: 一些重要的相切, 不等式放缩, 超越函数 10

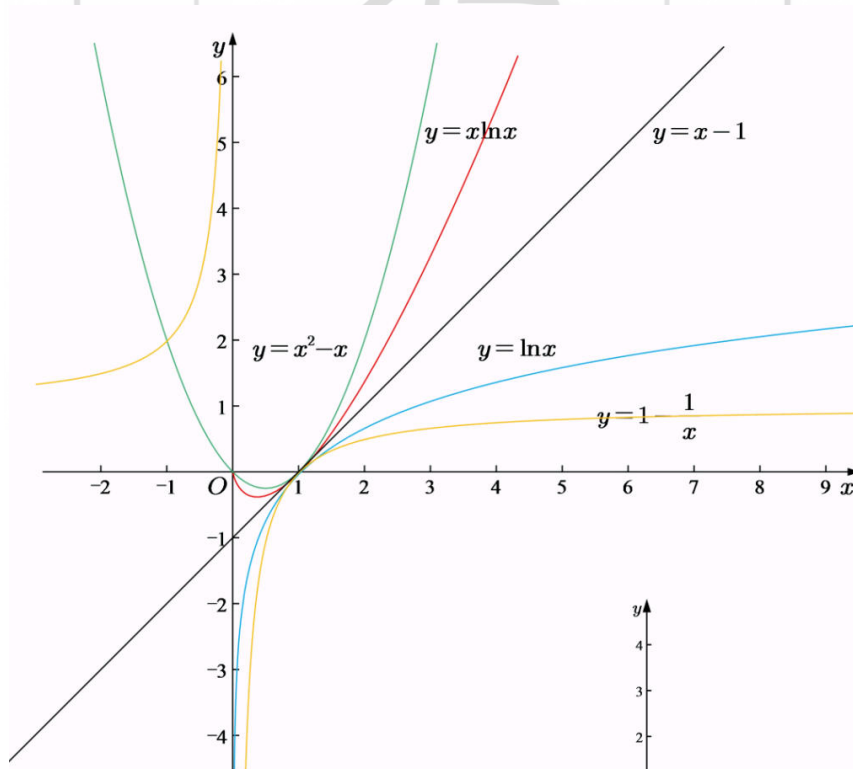


图 2.18: 一些重要的相切, 不等式放缩, 超越函数 11

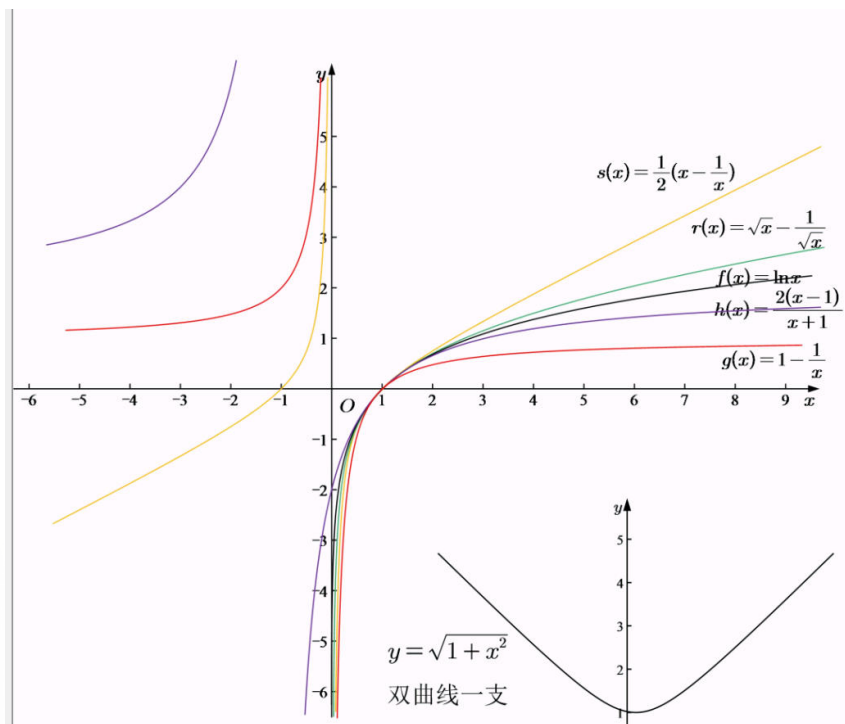


图 2.19: 一些重要的相切, 不等式放缩, 超越函数 12

2.3 数论基础

整除的定义与性质

本节讲述高中可能用到的数论内容, 进一步准备强基竞赛的读者可以去看第十一章。

定义

对任意 $a, b \in \mathbb{N}^*$, 若存在 $c \in \mathbb{N}^*$ 使得 $b = a \cdot c$, 则称 a 整除 b , 记作 $a \mid b$; 反之, 若不存在这样的 c , 则称 a 不整除 b , 记作 $a \nmid b$ 。

性质

1. $a \mid b \implies (-a) \mid b$ 且 $a \mid (-b)$;
2. 传递性: 若 $a \mid b$ 且 $b \mid c$, 则 $a \mid c$;
3. 线性组合性质: 若 $a \mid b$ 且 $a \mid c$, 则对任意整数 x, y , 有 $a \mid bx + cy$ 。

常见整除的判定定理

1. **3 (或 9) 的倍数**: 一个数的各位数字之和是 3 (或 9) 的倍数, 则该数是 3 (或 9) 的倍数。以三位数 $\overline{abc}$ 为例推导:

$$\overline{abc} = 100a + 10b + c = (99a + 9b) + (a + b + c),$$

因 $99a + 9b$ 是 3 (或 9) 的倍数, 故 $3 \mid (a + b + c) \iff 3 \mid \overline{abc}$ (同理 $9 \mid (a + b + c) \iff 9 \mid \overline{abc}$)。

2. **4 (或 25) 的倍数**: 一个数的末两位数字组成的数是 4 (或 25) 的倍数, 则该数是 4 (或 25) 的倍数。以三位数 $\overline{abc}$ 为例推导:

$$\overline{abc} = 100a + \overline{bc},$$

因 100 是 4 (或 25) 的倍数, 故 $4 \mid \overline{bc} \iff 4 \mid \overline{abc}$ (同理 $25 \mid \overline{bc} \iff 25 \mid \overline{abc}$)。

3. **5 的倍数**: 一个数的个位数字是 0 或 5, 则该数是 5 的倍数。以三位数 $\overline{abc}$ 为例推导:

$$\overline{abc} = 100a + 10b + c,$$

因 $100a + 10b$ 是 5 的倍数, 故 $5 \mid c \iff 5 \mid \overline{abc}$ 。

4. **11 的倍数**: 一个数的奇数位数字之和与偶数位数字之和的差是 11 的倍数, 则该数是 11 的倍数。以四位数 $\overline{abcd}$ 为例推导:

$$\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d = (1001a + 99b + 11c) + (a - b + c - d),$$

因 $1001a + 99b + 11c$ 是 11 的倍数, 故 $11 \mid (a - b + c - d) \iff 11 \mid \overline{abcd}$ 。

公因数与公倍数

公因数

若整数 d 满足 $d \mid a$ 且 $d \mid b$, 且 $d \leq a$ 、 $d \leq b$, 则称 d 是 a 、 b 的公因数。

最大公因数: 记为 $\gcd(a, b)$;

互质 (互素): 若 $\gcd(a, b) = 1$, 则称 a 、 b 互质。

性质

1. 若 $a \mid c$, $b \mid c$, 且 $\gcd(a, b) = 1$, 则 $ab \mid c$ 。

利用分解质因数证明: 设 $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ (p_i 为互不相同的质数), $b = q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \dots q_m^{\beta_m}$ (q_j 为互不相同的质数), 由 $\gcd(a, b) = 1$ 知 $p_i \neq q_j$ 。因 $a \mid c$, 故 c 含因子 $p_1^{\alpha'_1} p_2^{\alpha'_2} \dots p_k^{\alpha'_k}$ ($\alpha'_i \geq \alpha_i$); 因 $b \mid c$, 故 c 含因子 $q_1^{\beta'_1} q_2^{\beta'_2} \dots q_m^{\beta'_m}$ ($\beta'_j \geq \beta_j$); 因此 $c = p_1^{\alpha'_1} \dots p_k^{\alpha'_k} q_1^{\beta'_1} \dots q_m^{\beta'_m}$, 而 $ab = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k} q_1^{\beta_1} \dots q_m^{\beta_m}$, 由 $\alpha'_i \geq \alpha_i$ 、 $\beta'_j \geq \beta_j$ 得 $ab \mid c$ 。

2. 若 $a \mid bc$ 且 $\gcd(a, b) = 1$, 则 $a \mid c$;

3. 设 p 为质数:

$$\begin{cases} p \mid ab \implies p \mid a \text{ 或 } p \mid b, \\ p \nmid a \text{ 且 } p \nmid b \implies p \nmid ab \end{cases}$$

(后者为前者的逆否命题)

最小公倍数

记为 $\text{lcm}(a, b)$, 满足核心关系:

$$\gcd(a, b) \cdot \text{lcm}(a, b) = ab$$

质数与合数

定义

若正整数 p 只有 1 和 p 两个正因子, 则称 p 为质数 (素数); 否则称为合数。

规定: 1 既不是质数也不是合数。

分解质因数

对任意 $n \in \mathbb{N}^*$, n 可唯一分解为

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k},$$

其中 $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ 是质数, $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$ ($1 \leq i \leq k$)。

1. 正因数个数 $d(n)$:

$$d(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$$

推导: 设 n 的正因数为 $d = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k}$, 其中 $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$ ($1 \leq i \leq k$)。由乘法原理, 每个 β_i 有 $\alpha_i + 1$ 种选择, 故正因数个数为各指数加 1 的乘积。

2. 正因数之和 $\sigma(n)$:

$$\sigma(n) = (1 + p_1 + \cdots + p_1^{\alpha_1})(1 + p_2 + \cdots + p_2^{\alpha_2}) \cdots (1 + p_k + \cdots + p_k^{\alpha_k})$$

推导: 正因数之和是各质因数的幂次和的乘积, 由乘法原理的自然推广可得。

证明质数无穷多个 (反证法)

假设只有有限个质数, 记为 $p_1, p_2, \dots, p_n$ 。

构造新数 $P = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$, 显然 $P > p_i$ (对所有 $1 \leq i \leq n$), 故 P 为合数。

因此存在质因子 p_j 满足 $p_j < P$, 不妨设 $p_j = p_1$, 则 $p_1 \mid P = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$ 。

又 $p_1 \mid p_1 p_2 \cdots p_n$, 故 $p_1 \mid (P - p_1 p_2 \cdots p_n) = 1$, 这与 p_1 是质数 ($p_1 \geq 2$) 矛盾。

因此假设不成立, 质数有无穷多个。

同余的定义与性质

定义

若整数 a, b 除以正整数 p 的余数相同, 则称 a, b 模 p 同余, 记作

$$a \equiv b \pmod{p}.$$

性质

1. 同余保持加法 若 $a \equiv b \pmod{m}$, $c \equiv d \pmod{m}$, 则

$$a + c \equiv b + d \pmod{m}.$$

证明: 由 $a \equiv b \pmod{m} \iff m \mid (a - b)$, $c \equiv d \pmod{m} \iff m \mid (c - d)$, 两式相加得 $m \mid (a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d)$, 故 $a + c \equiv b + d \pmod{m}$ 。

2. 同余保持乘法 若 $a \equiv b \pmod{m}$, $c \equiv d \pmod{m}$, 则

$$ac \equiv bd \pmod{m}.$$

证明: 要证 $ac \equiv bd \pmod{m}$, 只需证 $m \mid (ac - bd)$ 。构造变形: $ac - bd = ac - bc + bc - bd = c(a - b) + b(c - d)$ 。由 $m \mid (a - b)$ 且 $m \mid (c - d)$, 得 $m \mid c(a - b) + b(c - d)$, 故 $ac \equiv bd \pmod{m}$ 。

利用同余语言证明奇数和偶数的一些性质

命题：若 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 都是奇数，则 $a_1 a_2 \dots a_n$ 也是奇数；反之，若存在一个 a_i 是偶数，则乘积为偶数。

证明：

- 奇数满足 $a_i \equiv 1 \pmod{2}$ ，故

$$a_1 a_2 \dots a_n \equiv 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1 \equiv 1 \pmod{2},$$

即乘积为奇数。

- 若存在 a_i 为偶数，则 $a_i \equiv 0 \pmod{2}$ ，故

$$a_1 a_2 \dots a_n \equiv 0 \pmod{2},$$

即乘积为偶数。

完全平方数

同余性质

$$x \equiv y \pmod{m} \implies x^2 \equiv y^2 \pmod{m}$$

完全平方数除以不同数的余数

这是数论里面的二次剩余（平方剩余）问题。

除数	可能的余数
3	0, 1
4	0, 1
5	0, 1, 4
7	0, 1, 2, 4
8	0, 1, 4
9	0, 1, 4, 7
10	0, 1, 4, 5, 6, 9

非完全平方数的判定

$$x^2 < S < (x+1)^2 \implies S \text{ 不是完全平方数}$$

不定方程与高斯函数

不定方程

指未知数个数多于方程个数的方程（组），记为 $(x, y, z, \dots)$ ，解通常有无穷多组。

高斯函数（取整函数）

定义： $f(x) = [x]$ （表示不超过 x 的最大整数）。

性质：

1. $[x] \leq x < [x] + 1$;
2. $[x] + \left[x + \frac{1}{2} \right] = [2x]$ 。

2.4 关于代数部分 B 习题课的教案

我们组织了以下习题作为代数部分 B 这一部分的复习使用。

2.4.1 第一次习题课

重点训练内容为变量代换在轮换对称式中的运用。

- 常值代换:T1, T2, T7
- 恒等变形:T3, T4
- 变量代换:T5
- 代数变形:T6

习题 1 (2015 北京大学博雅计划) 整数 x, y, z 满足 $xy + yz + xz = 1$, 则 $(1 + x^2)(1 + y^2)(1 + z^2)$ 可能取到的值为 ()

- A. 16900
- B. 17900
- C. 18900
- D. 以上都不对

习题 2 (2017 北京大学博雅计划) 整数 a, b, c 满足 $a + b + c = 1$, $s = (a + bc)(b + ac)(c + ab) > 100$, 则 s 的最小值属于下面哪个区间 ()

- A. $(100, 110]$
- B. $(110, 120)$
- C. $(120, 130]$
- D. 以上都不对

习题 3 设 a, b, c 为非零常数, 且 $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, $a\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + b\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right) + c\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = -3$, 则 $a + b + c$ 的可能值有 ()

- A. 3 个
- B. 2 个
- C. 1 个
- D. 前三个答案都不对

习题 4 (2015 北京大学博雅计划) 设 $x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, $y = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$, $z = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$, 且 $x + y + z = 1$, 则 $x^{2015} + y^{2015} + z^{2015}$ 的值为 _____。

习题 5 (2012 清华夏令营) 已知 a, b, c 是三角形 ABC 的三条边的边长, 则以下判断正确的是 ()

- A. $\frac{3}{2} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$
B. $\frac{3}{2} < \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$
C. $\frac{3}{2} < \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \leq 2$
D. $\frac{3}{2} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \leq 2$

习题 6 设 x 满足条件 $x^3 - \frac{1}{x^3} = 8\sqrt{5}$, 则 $x^2 + \frac{1}{x^3}$ 的值为 _____。

习题 7 (2018 北京大学自主招生) 设正实数 a, b 满足 $a + b = 1$, 则 $\frac{1}{a} + \frac{27}{b^3}$ 的最小值为 ()

- A. $\frac{47 + 13\sqrt{13}}{2}$
B. $\frac{55 + 15\sqrt{13}}{2}$
C. 218
D. 前三个答案都不对

2.4.2 第二次习题课

注: T12, T13, T19 是补充题目, 见 2.5 节。

- 恒等变形: T8, T20, T21
- 函数观点: T9, T18, T19
- 变量代换: T10, T15
- 不等式: T11, T12, T13, T14, T16, T17
- 反证法: T22

习题 8 (2016 北京大学博雅计划) 已知对于实数 a , 存在实数 b, c , 满足 $a^3 - b^3 - c^3 = 3abc$, $a^2 = 2(b + c)$, 则这样的实数 a 的个数为 ()

- A. 1
B. 3
C. 无穷个
D. 前三个答案都不对

习题 9 (2016 北京大学博雅计划) 三个不同的实数 x, y, z 满足 $x^3 - 3x^2 = y^3 - 3y^2 = z^3 - 3z^2$, 则 $x + y + z$ 等于 ()

- A. -1
- B. 0
- C. 1
- D. 前三个答案都不对

习题 10 (2018 北京大学自主招生) 设三个实数 a, b, c 组成等比数列, $c > 0$ 且 $a \leq 2b + 3c$, 则实数 $\frac{b-2c}{a}$ 的取值范围是 ()

- A. $\left(-\infty, \frac{1}{16}\right]$
- B. $\left(-\infty, \frac{1}{9}\right]$
- C. $\left(-\infty, \frac{1}{8}\right]$
- D. 前三个答案都不对

习题 11 (全国数学联赛) 实数 x, y 满足 $x^2 - xy + y^2 = 1$, 若 $S = x^2 + y^2$, 则 $\frac{1}{S_{\max}} + \frac{1}{S_{\min}}$ 的值是 _____。

习题 14 (2017 清华领军计划) 设 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 是两个单位向量, x, y 是实数。若 $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle = \frac{\pi}{3}$, $|x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2| = 1$, 则 ()

- A. x 的最大值为 1
- B. x 的最大值为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
- C. $x + y$ 的最大值为 $\sqrt{3}$
- D. $x + y$ 的最大值为 $2\sqrt{3}$

习题 15 已知实数 x, y, z, w 满足
$$\begin{cases} x - 2y - z + 2w = 0 \\ 2yz - wx = 0 \\ z \geq y \end{cases}$$
, 则 $x + y + z + w$ 的最小值为 ()

- A. $6 + \sqrt{2}$
- B. $6 + 2\sqrt{2}$
- C. $6 + 3\sqrt{2}$
- D. $6 + 4\sqrt{2}$

习题 16 已知 $a_i \in \mathbb{R} (i = 1, 2, 3, 4, 5)$, $(a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_3)^2 + (a_3 - a_4)^2 + (a_4 - a_5)^2 = 1$, 则 $|a_1 - 2a_2 - a_3 + 2a_5|$ 的最大值为 ()

- A. $2\sqrt{2}$
- B. $2\sqrt{5}$
- C. $\sqrt{5}$
- D. $\sqrt{10}$

习题 17 (2018 北京大学自主招生) 设实数 x, y 满足 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, 则 $|3x + 4y - 12|$ 的取值范围为 ()

- A. $[0, +\infty)$
- B. $[12 - 2\sqrt{13}, 12 + 2\sqrt{13}]$
- C. $[0, 12 + 2\sqrt{13}]$
- D. 前三个答案都不对

习题 18 (2017 清华领军计划) 设 $a > 0, b > 0$, 若 $a^2 + a = 3b^2 + 2b$, 则 ()

- A. $a < b$
- B. $b < a$
- C. $a < 2b$
- D. $2b < a$

习题 20 (2018 北京大学自主招生) 已知 $a \neq b$, $a^2(b+c) = b^2(a+c) = 1$, 则 $|c^2(a+b) - abc|$ 的值为 ()

- A. 2
- B. 1
- C. 0
- D. 前三个答案都不对

习题 21 (2017 北京大学自主招生) 实数 a, b 满足 $(a^2 + 4)(b^2 + 1) = 5(2ab - 1)$, 则 $a + \frac{1}{a}$ 的值为 ()

- A. 4
- B. $\frac{5}{2}$
- C. 2
- D. 前三个答案都不对

习题 22 (2007 清华大学计划) $x_1, x_2, \dots, x_{2017}$ 均为正数, $\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \dots + \frac{1}{1+x_{2017}} = 1$, 则关于 $x_1, x_2, \dots, x_{2017}$ 的说法错误的是 ()

- A. 小于 1 的数最多只有一个
- B. 小于 2 的数最多只有两个
- C. $\max\{x_1, x_2, \dots, x_{2017}\} \geq 2016$
- D. $\max\{x_1, x_2, \dots, x_{2017}\} \geq 2017$



2.5 关于代数部分 B 习题课的题目分析, 讲法和解答

我曾在某几次线上家教时做过代数部分 B 习题课的题目分析和手写解答, 部分题目给出了多种解法, 它们远比板书漂亮。

通过常值代换来使整个式子齐次化:

$$\begin{cases} 1+x^2 = xy+yz+zx+x^2 = y(x+z) + x(x+z) = (x+y)(x+z). \\ 1+y^2 = (x+y)(y+z) \\ 1+z^2 = (x+z)(y+z) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (1+x^2)(1+y^2)(1+z^2) = (x+y)^2(y+z)^2(x+z)^2 = [(x+y)(y+z)(x+z)]^2$$

$(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)$ 是平方数 $\Rightarrow$ 排除 B, C.

对于 A: $16900 = 130^2$. 下面验证 $(x+y)(y+z)(x+z) = 130$ 或 -130 是否成立.

$(x+y)(y+z)(z+x) = 130 = 2 \times 5 \times 13$. 注意到 $x+y, y+z, z+x$ 中 x, y, z 地位相等.

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ x+z=5 \\ y+z=13 \end{cases} \Rightarrow x+y+z=10 \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=5 \\ z=8 \end{cases} \text{ 满足存在性. 故选 A.}$$

图 2.20: 第一次习题课 T1 解法

通过常值代换来使整个式子齐次化:

$$\begin{cases} a+bc = a(a+b+c) + bc = a^2 + ab + bc + ac = (a+b)(a+c) \\ b+ac = (a+b)(b+c) \\ c+ab = (b+c)(a+c) \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = [(a+b)(b+c)(a+c)]^2 > 100 \Rightarrow S_{\min} = 121 \Rightarrow (a+b)(b+c)(a+c) = 11 \text{ 或 } -11.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 \nmid a+b \\ 2 \nmid b+c \Rightarrow 2(a+b+c) = 2 \Rightarrow 2 \nmid a+b+c. \text{ 矛盾!} \\ 2 \nmid a+c \end{cases} \text{ 故 } S_{\min} \nmid \text{ 含 121 的区间} \Rightarrow D.$$

图 2.21: 第一次习题课 T2 解法

通过恒等变形来使整个式子齐次化:

$$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=-3$$

$$\Rightarrow a(ac+ab)+b(bc+ab)+c(bc+ac)=-3abc.$$

$$\Rightarrow a^2c+a^2b+b^2c+b^2a+c^2b+c^2a=-3abc$$

$$\Rightarrow a(b^2+c^2)+b(a^2+c^2)+c(a^2+b^2)=-3abc$$

$$\Rightarrow a(1-a^2)+b(1-b^2)+c(1-c^2)=-3abc$$

$$\Rightarrow a^3+b^3+c^3-a-b-c=3abc$$

$$\Rightarrow a^3+b^3+c^3-3abc=a+b+c.$$

$$\Rightarrow (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)=a+b+c$$

$$\Rightarrow a+b+c=0 \text{ 或 } a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=1$$

$$\text{即 } a+b+c=0 \text{ 或 } ab+ac+bc=0$$

$$\Rightarrow (a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)=1$$

$$\Rightarrow a+b+c=\pm 1. \text{ 综上: } a+b+c=0 \text{ 或 } \pm 1$$

图 2.22: 第一次习题课 T3 解法

通过恒等变形来使整个式子齐次化:

$$x+y+z=1 \Rightarrow (x+1)+(y+1)+(z+1)=0$$

$$\Rightarrow \frac{(b+c)^2-a^2}{2bc} + \frac{(c-a)^2-b^2}{2ac} + \frac{(a-b)^2-c^2}{2ab} = 0$$

这种“拼凑1”的方法可以把分母调整到分子上”

$$\Leftrightarrow a(b+c-a)(b+c+a)+b(c-a-b)(c-a+b)+c(a-b-c)(a+b+c)=0$$

$$\Leftrightarrow (b+c-a)(ab+ac+a^2+bc-ba-b^2-ac+bc-c^2)=0$$

$$\Leftrightarrow (b+c-a)(a^2-b^2-c^2+2bc)=0$$

$$\Leftrightarrow (b+c-a)(a^2-(b-c)^2)=0$$

$$\Leftrightarrow (b+c-a)(a-b+c)(a+b-c)=0$$

$$\Rightarrow a=b+c \text{ 或 } b=a+c \text{ 或 } c=a+b$$

$$\text{不妨设 } a=b+c \Rightarrow b=a-c \Rightarrow x=\frac{b^2+c^2-b^2-c^2-2bc}{2bc}=-1$$

$$y=\frac{c^2+a^2-c^2-a^2+2ac}{2ac}=1, z=1$$

$$\Rightarrow x^{2015}+y^{2015}+z^{2015}=1$$

图 2.23: 第一次习题课 T4 解法

法一用不等式去做:

糖水不等式: $\frac{a}{b} < \frac{a+m}{b+m}$ ($b>a>0, m>0$).

$$\begin{cases} \frac{a}{b+c} < \frac{2a}{a+b+c} \\ \frac{b}{a+c} < \frac{2b}{a+b+c} \\ \frac{c}{a+b} < \frac{2c}{a+b+c} \end{cases} \Rightarrow S = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} < \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2. \text{ 排除C,D.}$$

拓展: $\forall a, b, c > 0$, 求证 $S = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$.

思路: 三角形ABC, 分子和分母的和都为定值, 自然想到柯西不等式

$$\begin{aligned} S+3 &= \frac{a}{b+c} + 1 + \frac{b}{a+c} + 1 + \frac{c}{a+b} + 1 = \frac{a+b+c}{b+c} + \frac{a+b+c}{a+c} + \frac{a+b+c}{a+b} = (a+b+c) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+b} \right) \\ &= \frac{1}{2}(b+c+a+c+a+b) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+b} \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow [(b+c)+(a+c)+(a+b)] \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+b} \right) \geq (1+1+1)^2 = 9.$$

$$\Rightarrow S+3 \geq \frac{9}{2} \Rightarrow S \geq \frac{3}{2} \text{ 得证.}$$

图 2.24: 第一次习题课 T5 解法 1

法二用变量代换去做:

设 $x=a+b, y=b+c, z=a+c$, 则 $a+b+c = \frac{1}{2}(x+y+z)$.

$$\Rightarrow \begin{cases} c = \frac{1}{2}(y+z-x) \\ b = \frac{1}{2}(x+y-z) \\ a = \frac{1}{2}(x+z-y) \end{cases} \Rightarrow S = \frac{y+z-x}{2x} + \frac{z+y-x}{2y} + \frac{x+y-z}{2z}$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} \left(\frac{y}{x} + \frac{z}{x} - 1 + \frac{z}{y} + \frac{y}{y} - 1 + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} - 1 \right) \geq \frac{1}{2}(6-3) = \frac{3}{2}. \text{ iff } x=y=z \text{ 取等.}$$

图 2.25: 第一次习题课 T5 解法 2

我们通过 T5, 可以总结出变量代换的常见类型:

变量代换常见类型:

$$\textcircled{1} abc=1 \Rightarrow a=\frac{y}{x}, b=\frac{z}{y}, c=\frac{x}{z}$$

$$\textcircled{2} ab+bc+ac=1 \Rightarrow a=\tan\frac{A}{2}, b=\tan\frac{B}{2}, c=\tan\frac{C}{2}.$$

补充: $\triangle ABC$ 中: $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}=1.$

$$\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot A \cot C = 1$$

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C.$$

$$\textcircled{3} a, b, c \text{ 是 } \triangle ABC \text{ 三边} \Rightarrow a=x+y, b=y+z, c=x+z \quad (x, y, z > 0).$$

$$\textcircled{4} \sqrt{1-x^2} \Rightarrow x=\sin\theta, \sqrt{1+x^2} \Rightarrow x=\tan\theta \quad (\tan^2\theta+1=\sec^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}).$$

图 2.26: 第一次习题课 T5 总结

法一: 解 x

法二: 立方差公式代数变形:

$$x^3 - \frac{1}{x^3} = (x - \frac{1}{x})(x^2 + \frac{1}{x^2}) = (x - \frac{1}{x})[(x - \frac{1}{x})^2 + 3] = 8\sqrt{5}$$

$$\text{令 } x - \frac{1}{x} = t \Rightarrow t(t^2 + 3) = 8\sqrt{5} \Rightarrow t^3 + 3t = 8\sqrt{5}$$

$$f(t) = t^3 + 3t \uparrow \Rightarrow t = \sqrt{5} \text{ 是唯一解} \Rightarrow x - \frac{1}{x} = \sqrt{5} \Rightarrow x^2 - \sqrt{5}x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{5} \pm 3}{2}$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^3} = \sqrt{5}x + 1 + \frac{1}{x(\sqrt{5}x+1)} = \sqrt{5}x + 1 + \frac{1}{6x+5} = \frac{25-5\sqrt{5}}{2} \text{ 或 } \frac{-11\sqrt{5}-11}{2}$$

图 2.27: 第一次习题课 T6 解法

通过常值代换来使整个式子齐次化:

$$\frac{1}{a} + \frac{27}{b^3} = \frac{a+b}{a} + \frac{27(a+b)^3}{b^3}. \text{ 令 } \frac{a+b}{b} = t, \text{ 则 } t > 1, \frac{a}{b} = t-1, \frac{b}{a} = \frac{1}{t-1}$$

$$f(t) = \frac{1}{t-1} + 1 + 27t^3 \quad (t > 1) \Rightarrow f(t) = 81t^3 - \frac{1}{(t-1)^2} = \frac{81t^3(t-1)^2 - 1}{(t-1)^2} = \frac{(9t(t-1)-1)(9t(t-1)+1)}{(t-1)^2}$$

$$\text{令 } g(t) = (9t(t-1)-1)(9t(t-1)+1) = (9t^2-9t-1)(9t^2-9t+1) = 0 \Leftrightarrow 9t^2-9t-1=0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{3+\sqrt{13}}{6} \Rightarrow f(t) \text{ 在 } (1, \frac{3+\sqrt{13}}{6}) \downarrow, \text{ 在 } (\frac{3+\sqrt{13}}{6}, +\infty) \uparrow$$

$$f(t)_{\min} = f(\frac{3+\sqrt{13}}{6}) = \frac{47+13\sqrt{13}}{2}. \text{ 选 A}$$

图 2.28: 第一次习题课 T7 解法

强化一下T3的公式:

$$\begin{aligned} a^3+b^3+c^3-3abc &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc) \\ a^3-b^3-c^3-3abc &= (a-b-c)(a^2+b^2+c^2+ab+ac-bc) \end{aligned}$$

用 $-b$ 替换 b

$$a^3-b^3-c^3=3abc \Rightarrow a^3-b^3-c^3-3abc=0 \Rightarrow (a-b-c)(a^2+b^2+c^2+ab+ac-bc)=0.$$

$$\textcircled{1} a-b-c=0 \Rightarrow a=b+c=\frac{a^2}{2} \Rightarrow a=0 \text{ or } a=2$$

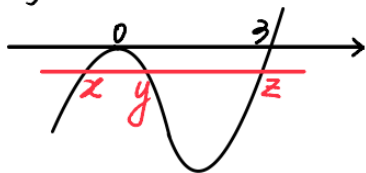
$$\textcircled{2} a^2+b^2+c^2+ab+ac-bc=0 \Rightarrow 2(a^2+b^2+c^2+2ab+2ac-2bc)=0 \Rightarrow (a+b)^2+(a+c)^2+(b-c)^2=0$$

$$\Rightarrow b=c=-a \Rightarrow a^2=-4a \Rightarrow a=0 \text{ or } a=-4. \quad \text{综上: } a=0 \text{ or } a=2 \text{ or } a=-4.$$

图 2.29: 第二次习题课 T8 解法

法一: 利用函数极值点:

$$\text{令 } f(t)=t^3-3t^2=t^2(t-3) \text{ 则 } f(x)=f(y)=f(z).$$



$$\begin{cases} x+y \geq 0 \\ z \geq 3 \end{cases} \Rightarrow x+y+z \geq 3.$$

法二: 三次函数韦达定理:

$$\text{令 } x^3-3x=y^3-3y=z^3-3z=k. \text{ 则 } x, y, z \text{ 是方程 } t^3-3t-k=0 \text{ 的根.}$$

$$\Rightarrow x+y+z = -\frac{b}{a} = 3.$$

图 2.30: 第二次习题课 T9 解法

通过消元来使整个式子齐次化:

$$b^2=ac \Rightarrow a = \frac{b^2}{c}$$

$$\frac{b-2c}{a} = \frac{b-2c}{\frac{b^2}{c}} = \frac{bc-2c^2}{b^2} = \frac{c}{b} - 2\left(\frac{c}{b}\right)^2 = -2t^2+t. \quad \text{其中 } t = \frac{c}{b}.$$

$$\frac{b^2}{c} = a \leq 2b+3c \Rightarrow b^2 \leq 2bc+3c^2 \Rightarrow 1 \leq 2t+3t^2 \Rightarrow t \leq -1 \text{ or } t \geq \frac{1}{3}.$$

$$\Rightarrow -2t^2+t \in \left(-\infty, \frac{1}{9}\right].$$

图 2.31: 第二次习题课 T10 解法

法一: 基本不等式

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - xy = 1 &\Rightarrow x^2 + y^2 - 1 = xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2} \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 2. \quad \text{iff } x=y=1 \text{ 取等.} \\ x^2 + y^2 \geq 2xy &\Rightarrow x^2 + y^2 \geq -2xy \Rightarrow xy \geq -\frac{x^2 + y^2}{2} \Rightarrow x^2 + y^2 - 1 \geq -\frac{x^2 + y^2}{2} \Rightarrow x^2 + y^2 \geq \frac{2}{3} \\ &\text{iff } x=-y=\frac{\sqrt{2}}{3} \text{ 取等.} \\ \Rightarrow \frac{2}{3} \leq x^2 + y^2 \leq 2 &\Rightarrow \frac{1}{S_{\max}} + \frac{1}{S_{\min}} = 2. \end{aligned}$$

法二: 和差换元

$$\begin{aligned} \text{令 } \begin{cases} x=a+b \\ y=a-b \end{cases} &\text{ 则 } a^2 + b^2 = 1. \Rightarrow a^2 = 1 - b^2 \geq 0 \Rightarrow b^2 \in [0, 1]. \\ \Rightarrow S = 2(a^2 + b^2) = -4b^2 + 2 &\in [\frac{2}{3}, 2] \Rightarrow \frac{1}{S_{\max}} + \frac{1}{S_{\min}} = 2. \end{aligned}$$

图 2.32: 第二次习题课 T11 解法 1,2

法三: 三角换元

$$\begin{aligned} x^2 - xy + y^2 = 1 &\Rightarrow (x - \frac{y}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2}y)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x - \frac{y}{2} = \cos \theta \\ \frac{\sqrt{3}}{2}y = \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \theta + \cos \theta \\ y = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin \theta \end{cases} \\ \Rightarrow S = x^2 + y^2 &= \frac{1}{3} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta + \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin \theta \cos \theta + \frac{4}{3} \sin^2 \theta \\ &= 1 + \frac{2}{3} \sin^2 \theta + \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin \theta \cos \theta \\ &= 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1 - \cos 2\theta}{2} + \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin 2\theta \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \sin 2\theta - \frac{1}{3} \cos 2\theta + \frac{4}{3} \\ &= \frac{2}{3} \sin(2\theta + \varphi) + \frac{4}{3} \in [\frac{2}{3}, 2]. \Rightarrow \frac{1}{S_{\max}} + \frac{1}{S_{\min}} = 2. \end{aligned}$$

图 2.33: 第二次习题课 T11 解法 3

法四: 椭圆方程

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - xy &= 1 \\ \text{令 } x=u+v, y=u-v & \\ x^2 + y^2 - xy &= 2u^2 + 2v^2 - u^2 + v^2 = 1 \Rightarrow u^2 + 3v^2 = 1 \\ \Rightarrow \frac{u^2}{1} + \frac{v^2}{\frac{1}{3}} &= 1 \Rightarrow a=1, b=\frac{\sqrt{3}}{3} \\ x^2 + y^2 &= 2(u^2 + v^2) \in [\frac{2}{3}, 2] \Rightarrow \frac{1}{S_{\max}} + \frac{1}{S_{\min}} = 2. \end{aligned}$$

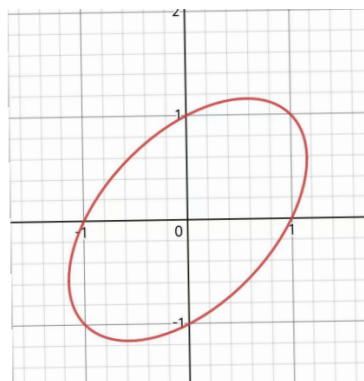


图 2.34: 第二次习题课 T11 解法 4

下面通过两个补充题说明上述四种解法的重要性：

T12. 不等式：

例题10： 实数 x, y 满足 $4x^2 - 5xy + 4y^2 = 5$ ，设 $S = x^2 + y^2$ ，求 $\frac{1}{S_{\max}} + \frac{1}{S_{\min}}$ 的值。

法一：基本不等式

$$\begin{aligned} 4x^2 - 5xy + 4y^2 = 5 &\Rightarrow 4(x^2 + y^2) = 5(xy + 1) \leq 5 \cdot \left(\frac{x^2 + y^2}{2} + 1 \right) \Rightarrow x^2 + y^2 \leq \frac{10}{3}. \text{ iff } x = y = \sqrt{\frac{5}{6}} \sqrt{2} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ x^2 + y^2 \geq -2xy &\Rightarrow xy \geq -\frac{x^2 + y^2}{2} \Rightarrow 5xy \geq -\frac{5}{2}(x^2 + y^2) \Rightarrow 4(x^2 + y^2) - 5 \geq -\frac{5}{2}(x^2 + y^2) \\ &\Rightarrow x^2 + y^2 \geq \frac{10}{3}. \text{ iff } x = -y = \sqrt{\frac{10}{26}} \sqrt{2} \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{1}{S_{\max}} + \frac{1}{S_{\min}} = \frac{8}{5}. \end{aligned}$$

图 2.35: 第二次习题课 T12 解法 1

法二：和差换元

$$\begin{cases} x = a + b \\ y = a - b \end{cases} \quad \text{则} \quad 3a^2 + 13b^2 = 5 \Rightarrow b^2 = \frac{5 - 3a^2}{13} \geq 0 \Rightarrow a^2 \in [0, \frac{5}{3}]$$

$$S = x^2 + y^2 = 2(a^2 + b^2) = 2(a^2 + \frac{5 - 3a^2}{13}) = \frac{20}{13}a^2 + \frac{10}{13} \in [\frac{10}{13}, \frac{10}{3}] \Rightarrow \frac{1}{S_{\max}} + \frac{1}{S_{\min}} = \frac{8}{5}.$$

图 2.36: 第二次习题课 T12 解法 2

法四：椭圆方程

$$\begin{aligned} 4x^2 - 5xy + 4y^2 = 5, \text{ 令 } x = u + v, y = u - v \\ \Rightarrow 3u^2 + 13v^2 = 5 \Rightarrow \frac{u^2}{\frac{5}{3}} + \frac{v^2}{\frac{5}{13}} = 1, a = \sqrt{\frac{5}{3}}, b = \sqrt{\frac{5}{13}} \\ x^2 + y^2 = 2(u^2 + v^2) \in 2 \cdot [\frac{5}{13}, \frac{5}{3}] \in [\frac{10}{13}, \frac{10}{3}] \\ \Rightarrow \frac{1}{S_{\max}} + \frac{1}{S_{\min}} = \frac{8}{5}. \end{aligned}$$

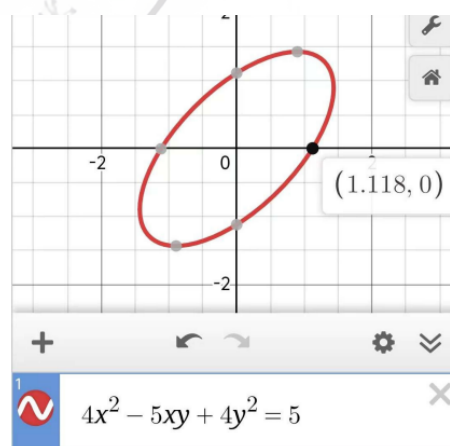


图 2.37: 第二次习题课 T12 解法 4

法三: 三角换元

$$\begin{aligned}
 4x^2 - 5xy + 4y^2 = 5 &\Rightarrow \frac{4}{5}x^2 - xy + \frac{4}{5}y^2 = 1 \Rightarrow \left(\frac{2}{\sqrt{5}}x - \frac{\sqrt{5}}{4}y\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{5}}y\right)^2 = 1 \\
 \text{令 } \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{5}}x - \frac{\sqrt{5}}{4}y = \cos\theta \\ \frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{5}}y = \sin\theta \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5\sqrt{5}}{2\sqrt{39}}\sin\theta + \frac{\sqrt{5}}{2}\cos\theta \\ y = \frac{4\sqrt{5}}{139}\sin\theta \end{cases} \\
 \Rightarrow S = x^2 + y^2 = \frac{25 \times 5}{4 \times 39}\sin^2\theta + \frac{5}{4}\cos^2\theta + \frac{25}{2\sqrt{39}}\sin\theta\cos\theta + \frac{16 \times 5}{39}\sin^2\theta \\
 = \frac{445}{4 \times 39}\sin^2\theta + \frac{5}{4}\cos^2\theta + \frac{25}{4\sqrt{39}}\sin 2\theta \\
 = \frac{5}{4} + \frac{89}{39}\sin^2\theta + \frac{25}{4\sqrt{39}}\sin 2\theta \\
 = \frac{5}{4} + \frac{89}{39} \cdot \frac{1 - \cos 2\theta}{2} + \frac{25}{4\sqrt{39}}\sin 2\theta \\
 = \frac{25}{4\sqrt{39}}\sin 2\theta - \frac{89}{78}\cos 2\theta + \frac{199}{78} \\
 = \frac{178 + 25\sqrt{39}}{156}\sin(2\theta + \varphi) + \frac{199}{78} \Rightarrow \frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\sin \beta} = 2
 \end{aligned}$$

图 2.38: 第二次习题课 T12 解法 3

T13. 不等式:

3. (2022 新高考 II) 若实数 x, y 满足 $x^2 + y^2 - xy = 1$, 则 (BC)

A. $x + y \leq 1$

B. $x + y \geq -2$

C. $x^2 + y^2 \leq 2$

D. $x^2 + y^2 \geq 1$

法一: 基本不等式

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 - xy = 1 &\Rightarrow (x+y)^2 - 3xy = 1 \Rightarrow (x+y)^2 - 1 = 3xy \leq \frac{3}{4}(x+y)^2 \Rightarrow -2 \leq x+y \leq 2 \\
 x^2 + y^2 = 1 + xy &\leq 1 + \frac{x^2 + y^2}{2} \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 2
 \end{aligned}$$

法二: 目标换元 + 判别式法

$$\begin{aligned}
 \text{令 } x+y=t &\Rightarrow y=t-x \Rightarrow x^2 + (tx^2 - x(t-x)) - 1 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3xt + t^2 - 1 = 0 \\
 \Delta \geq 0 &\Rightarrow -2 \leq t \leq 2 \Rightarrow -2 \leq x+y \leq 2
 \end{aligned}$$

图 2.39: 第二次习题课 T13 解法 1,2

法三: 两类三角换元

$$\textcircled{1} (x - \frac{y}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2}y)^2 = 1. \quad \text{令} \begin{cases} x - \frac{y}{2} = \cos \theta \\ \frac{\sqrt{3}}{2}y = \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta + \cos \theta \\ y = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \theta. \end{cases}$$

$$\Rightarrow x+y = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta + \cos \theta \in [-2, 2]. \quad x^2+y^2 = \frac{2}{3} \sin^2(\theta+\varphi) + \frac{4}{3} \in [\frac{2}{3}, 2].$$

$$\textcircled{2} \text{令 } x = t \cos \theta, y = t \sin \theta. \Rightarrow x^2+y^2 = t^2 \quad t^2 = \frac{1}{1 - \sin \theta \cos \theta} \in [\frac{2}{3}, 2].$$

图 2.40: 第二次习题课 T13 解法 3

法四: 椭圆方程

$$x^2+y^2-xy=1$$

$$\text{令 } x=u+v, y=u-v.$$

$$x^2+y^2-xy = 2u^2+2v^2-u^2+v^2=1 \Rightarrow u^2+3v^2=1$$

$$\Rightarrow \frac{u^2}{1} + \frac{v^2}{\frac{1}{3}} = 1 \Rightarrow a=1, b=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$x^2+y^2 = 2(u^2+v^2) \in [\frac{\sqrt{3}}{3}, 1]^2 = 2[\frac{1}{3}, 1] = [\frac{2}{3}, 2].$$

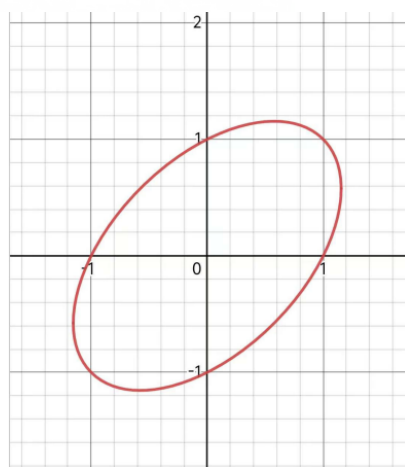


图 2.41: 第二次习题课 T13 解法 4

法一: 基本不等式 + 判别式法

$$\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle = \frac{\pi}{3}, \quad |x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2| = 1 \Rightarrow x^2y^2 + xy = 1.$$

$$(x+y)^2 - xy = 1 \Rightarrow (x+y)^2 = 1+xy \leq 1 + \frac{1}{4}(x+y)^2 \Rightarrow x+y \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}. \quad \text{iff } x=y=\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ 取等.}$$

$$y^2 + x \cdot y + (x^2-1) = 0. \quad \Delta \geq 0 \Rightarrow x^2 - 4(x^2-1) \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

法二: 三角换元

$$x^2+xy+y^2=1 \Rightarrow (y+\frac{x}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2}x)^2 = 1 \Rightarrow \text{令} \begin{cases} y+\frac{x}{2} = \sin \theta \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x = \cos \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cos \theta, \max x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ y = \sin \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta. \end{cases}$$

$$x+y = \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{3} \cos \theta = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin(\theta+\varphi), \quad \max = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

图 2.42: 第二次习题课 T14 解法

$$\begin{cases} x+2w=2y+z \\ wx=2yz \end{cases} \Rightarrow x+2w \geq 2\sqrt{2xw}. \quad 2y+z \geq 2\sqrt{4yz} = 4\sqrt{yz}$$

$$\Rightarrow 4y^2+4yz+z^2 \geq 16yz \Rightarrow 4y^2-12yz+z^2 \geq 0 \Rightarrow 4-12\left(\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{z}{y}\right)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow t^2-12t+4 \geq 0. \text{ 其中 } t = \frac{z}{y}. \Rightarrow t \leq 6-4\sqrt{2} \text{ or } t \geq 6+4\sqrt{2}.$$

图 2.43: 第二次习题课 T15 解法

$$\text{令 } a_1-a_2=x, a_2-a_3=y, a_3-a_4=z, a_4-a_5=w$$

$$\text{则 } x^2+y^2+z^2+w^2=1. \quad a_1-2a_2-a_3+2a_5 = x-y-2z-2w$$

$$\text{由 Cauchy 不等式: } [1 \cdot x + (-1) \cdot y + (-2) \cdot z + (-2) \cdot w]^2 \leq [1^2+1^2+2^2+2^2](x^2+y^2+z^2+w^2) = 10.$$

$$\text{iff } \frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-2} = \frac{w}{-2} \text{ 取等. } \Rightarrow x-y-2z-2w = \sqrt{10}.$$

图 2.44: 第二次习题课 T16 解法

法一: 三角换元

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \Rightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \text{令 } \begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases} \Rightarrow |3x+4y-12| = |4\sin\theta+6\cos\theta-12| = |2\sqrt{13}\sin(\theta+\varphi)-12|$$

$$\in [12-2\sqrt{13}, 12+2\sqrt{13}]$$

法二: 柯西不等式

$$\left[\left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2\right](6^2+4^2) \geq (3x+4y)^2 \Rightarrow -2\sqrt{13} \leq 3x+4y \leq 2\sqrt{13} \Rightarrow |3x+4y-12| \in [12-2\sqrt{13}, 12+2\sqrt{13}].$$

图 2.45: 第二次习题课 T17 解法

$$\text{令 } f(x) = x^2+x. \text{ 则 } f(x) \text{ 在 } (0, +\infty) \uparrow. \quad f(a) = a^2+3a = 3b^2+2b > b^2+3b = f(b). \Rightarrow a > b.$$

$$f(a) = a^2+3a = 3b^2+2b < 4b^2+2b = f(2b) \Rightarrow a < 2b$$

图 2.46: 第二次习题课 T18 解法

下面通过一个补充题说明上述函数观点的重要性：

T19. 函数观点：

7. (2014 天津理, 7) 设 $a, b \in \mathbb{R}$, 则 “ $a > b$ ” 是 “ $a|a| > b|b|$ ” 的 (C)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分又不必要条件

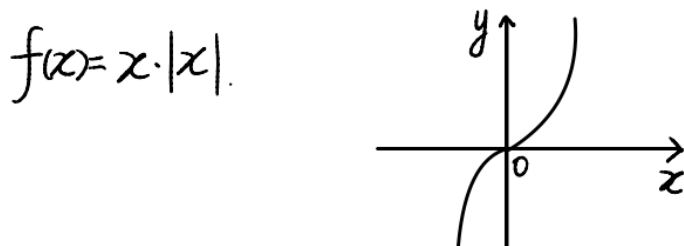


图 2.47: 第二次习题课 T19 解法

$$a^2(b+c) = b^2(a+c) \Rightarrow a^2(b+c) - b^2(a+c) = 0 \Rightarrow a^2b + a^2c - b^2a - b^2c = 0.$$

$$\Rightarrow ab(a-b) + c(a+b)(a-b) = 0 \Rightarrow ab + c(a+b) = 0. \Rightarrow ab + bc + ac = 0.$$

$$\textcircled{1} a^2(b+c) = 1 \Rightarrow a^2(b+c) + bc = 0 \Rightarrow a^2(b+c) = -bc \Rightarrow -abc = 1 \Rightarrow abc = -1$$

$$\textcircled{2} c(a+b) + ab = 0 \Rightarrow c^2(a+b) + abc = 0 \Rightarrow c^2(a+b) = -abc = 1$$

$$\Rightarrow c^2(a+b) - abc = 1 - (-1) = 2.$$

图 2.48: 第二次习题课 T20 解法

法一：恒等变形

$$a^2b^2 + 4b^2 + a^2 + 4 = 10ab - 5 \Rightarrow a^2b^2 - 6ab + 9 + 4b^2 + a^2 - 4ab = 0 \Rightarrow (ab-3)^2 + (a-2b)^2 = 0$$

$$\Rightarrow ab = 3 \text{ 且 } a = 2b \Rightarrow b(a + \frac{1}{a}) = ab + \frac{b}{a} = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}.$$

图 2.49: 第二次习题课 T21 解法 1

法二：判别式法

$$(a^2+4)b^2-10a \cdot b+(a^2+9)=0. \Delta \geq 0 \Rightarrow 100a^2-4(a^2+4)(a^2+9) \geq 0 \Rightarrow a^2=6.$$

图 2.50: 第二次习题课 T21 解法 2

A. 假设有 2 个. $x_1 < 1, x_2 < 1, \frac{1}{1+x_1} > \frac{1}{2}, \frac{1}{1+x_2} > \frac{1}{2}, \frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} > 1$. 矛盾.

B. 假设有 3 个. $x_1 < 2, x_2 < 2, x_3 < 2, \frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \frac{1}{1+x_3} > 1$. 矛盾.

C. 假设 $\max\{x_1, x_2, \dots, x_{2017}\} = x_1 < 2016, \frac{1}{1+x_1} > \frac{1}{2017}, \frac{1}{1+x_1} + \dots + \frac{1}{1+x_{2017}} > 1$. 矛盾.

图 2.51: 第二次习题课 T22 解法



3 初高中衔接——几何部分

3.1 三角形及其性质

从余弦定理的角度理解全等与相似

全等三角形

1. 定义：边角相等，具有确定性。

2. 判定定理：

[SSS]：已知 a, b, c ，由余弦定理 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ 、 $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ 、 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ ，可唯一确定 A, B, C ， $\triangle ABC$ 唯一确定。

[SAS]：已知 a, b, C ，由余弦定理 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ 得 c ，再由 SSS 判定， $\triangle ABC$ 唯一确定。

[AAS(ASA)]：已知 A, B, a ，由内角和 $C = \pi - A - B$ ，结合正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ 得 b, c ， $\triangle ABC$ 唯一确定。

[HL]：直角三角形中，已知 a, c （斜边），由勾股定理 $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ ，再由 SSS 判定， $\triangle ABC$ 唯一确定。

SSA 为什么不是判定定理

已知 a, b, A ，由正弦定理 $\sin B = \frac{b \sin A}{a}$ ，可能得到 B 或 $\pi - B$ ，对应两个不全等三角形：

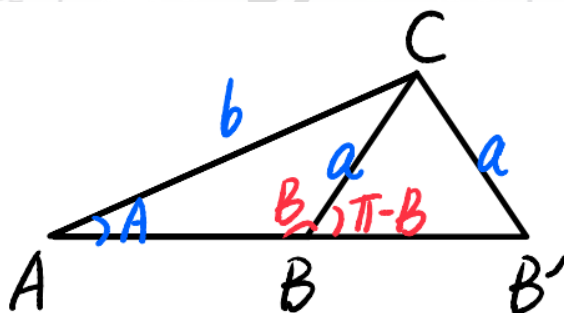


图 3.1: SSA 不能判定全等的示意图

此时 $BC = B'C = a$ 、 $AC = AC = b$ 、 $\angle CAB = \angle CAB' = A$ ，但 $\triangle ABC \not\cong \triangle AB'C$ ，故 SSA 不能唯一确定三角形。

相似三角形

1. 定义： $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k$ （相似比），且 $\angle A = \angle A'$ 、 $\angle B = \angle B'$ 、 $\angle C = \angle C'$ 。

2. 判定定理：

[AAA]：已知 $\angle A = \angle A'$ 、 $\angle B = \angle B'$ 、 $\angle C = \angle C'$ ，由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{a'}{\sin A'}$ ，得 $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ ，满足相似定义。

[SAS]：已知 $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = k$ 、 $\angle C = \angle C'$ ，由余弦定理：

$$\frac{c}{c'} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos C}}{\sqrt{a'^2 + b'^2 - 2a'b' \cos C'}} = \frac{\sqrt{k^2(a'^2 + b'^2 - 2a'b' \cos C')}}{\sqrt{a'^2 + b'^2 - 2a'b' \cos C'}} = k$$

故 $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k$, 满足相似定义。

余弦定理是二次齐次式, 这与相似三角形的 SAS 判定是自洽的。

三角形的四心和性质

重心: 中线交点

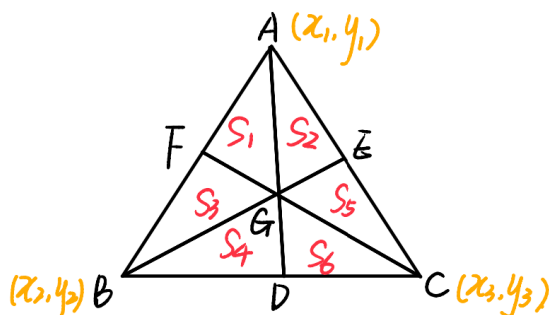


图 3.2: 三角形的重心

1. 比例性质: $AG : GD = BG : GE = CG : GF = 2 : 1$ (D, E, F 为各边中点)。
2. 面积性质: $S_1 = S_2 = \dots = S_6$ (由 $\frac{AG}{GD} = 2 = \frac{S_{\triangle ABG}}{S_{\triangle BGD}}$ 推导)。
3. 中线长度公式: $AD^2 + BC^2 = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2)$ (向量法可证)。
4. 坐标公式: 若 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$, 则重心 $G\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$ 。

内心: 角平分线交点

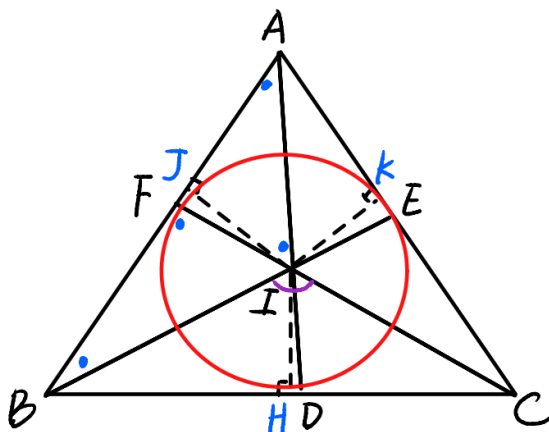


图 3.3: 三角形的内心

1. 存在性: 角平分线上点到角两边距离相等 ($IH = IJ = IK$), 故三线共点。
2. 角的性质: $\angle BIC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BAC$ (由内角和 $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$)。
3. 角平分线定理: $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$ (正弦定理可证)。

4. 切点长度: $AJ = AK = \frac{b+c-a}{2}$ 、 $BJ = BH = \frac{a+c-b}{2}$ 、 $CH = CK = \frac{a+b-c}{2}$ ($a = BC, b = AC, c = AB$)。

外心：中垂线交点

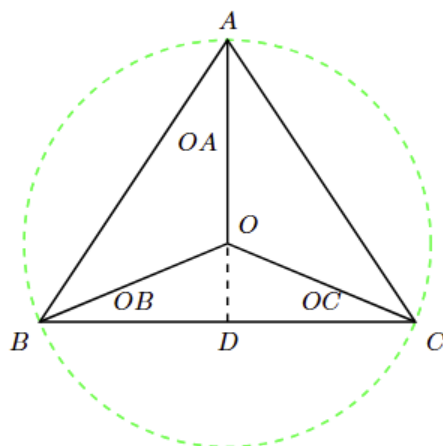


图 3.4: 三角形的外心

1. 存在性：中垂线上点到线段两端点距离相等 ($OA = OB = OC$)，故三线共点。
2. 角的性质： $\angle BOC = 2\angle BAC$ 、 $\angle AOC = 2\angle ABC$ 、 $\angle AOB = 2\angle ACB$ (圆周角定理)。

垂心：高线交点

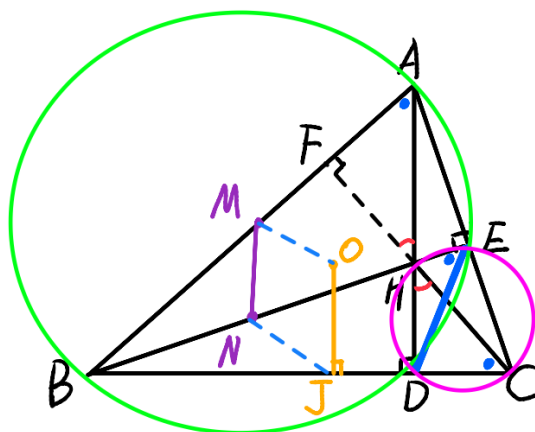


图 3.5: 三角形的垂心

1. 角的性质： $\angle BHC = 180^\circ - \angle BAC$ (四边形内角和推导)。
2. 欧拉线：外心 O 、重心 G 、垂心 H 共线，且 $OG : GH = 1 : 2$ 。

3.2 平面几何中的重要定理

在初等几何的平面部分，所涉及到的证明题分为两大类：证度量关系和证位置关系。证明位置关系中有一类问题比较棘手，即点共线、线共点和四点共圆的证明。常用的证明方法是利用梅涅劳斯 (Menelaus) 定理、赛瓦 (Ceva) 定理、西姆松定理和托勒密定理来证。这是一种表达形式简洁又非常

实用的方法. 特别是在点、线处于位置任意, 无法确定具体长度或角度的情况下, 使用如上定理证明问题时, 往往能得心应手, 起到事半功倍的作用.

一般地, 把梅涅劳斯 (Menelaus) 定理、赛瓦 (Ceva) 定理、西姆松定理和托勒密定理称为平面几何四大定理。

定理 3.1 (梅涅劳斯定理). 设 A' 、 B' 、 C' 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 、 CA 、 AB 所在直线上的点, 且至少一点在延长线上, 则 A' 、 B' 、 C' 共线的充要条件是

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = 1.$$

(注: 并非全都是“顶点到分点”, 而是按照顺序的比例)

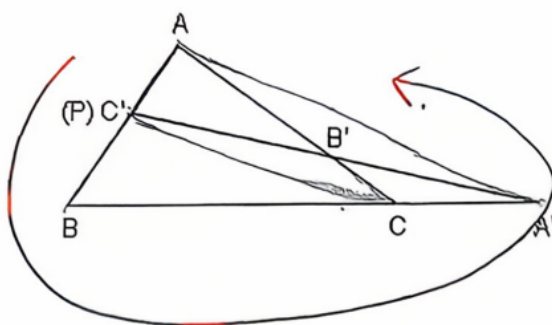


图 3.6: 梅涅劳斯定理

证明. **必要性:** 利用共边比例定理, 有

$$\frac{AC'}{C'B} = \frac{S_{\triangle ACA'}}{S_{\triangle BCA'}}, \quad \frac{BA'}{A'C} = \frac{S_{\triangle BA'C'}}{S_{\triangle A'CC'}}, \quad \frac{CB'}{B'A} = \frac{S_{\triangle CCB'}}{S_{\triangle A'C'A}}.$$

将三式相乘, 即得

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = 1.$$

充分性: 延长 $A'B'$ 交 AB 于点 P , 下证 P 与 C' 重合。

由题设

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = 1,$$

及

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = 1$$

(B' 、 P 、 A' 共线, 即上述必要性的结论),

两式相除得

$$\frac{AC'}{C'B} = \frac{AP}{PB}.$$

由点内分线段 AB 成定比的点的唯一性知, $P \equiv C'$, 故 A' 、 B' 、 C' 共线。□

定理 3.2 (笛沙格 (Desargues) 定理). 两三角形对应顶点的连线共点, 则对应边的交点共线; 反之, 两三角形对应边的交点共线, 则对应顶点的连线共点或平行 (前者为原定理, 后者为逆定理)。

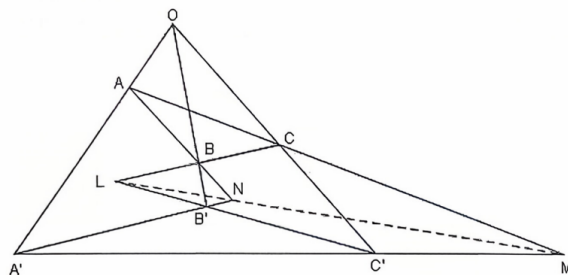


图 3.7: 笛沙格定理

原定理证明. 设 AA' 、 BB' 、 CC' 交于点 O , BC 交 $B'C'$ 于 L , CA 交 $C'A'$ 于 M , AB 交 $A'B'$ 于 N 。

$\triangle OBC$ 被直线 $LB'C'$ 所截, $\triangle OCA$ 被直线 $MA'C'$ 所截, $\triangle OAB$ 被直线 $NB'A'$ 所截, 分别满足:

$$\begin{aligned}\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CC'}{C'O} \cdot \frac{OB'}{B'B} &= 1, \\ \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AA'}{A'O} \cdot \frac{OC'}{C'C} &= 1, \\ \frac{AN}{NB} \cdot \frac{BB'}{B'O} \cdot \frac{OA'}{A'A} &= 1.\end{aligned}$$

将三式相乘, 约去公共项后可得:

$$\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = 1,$$

由梅涅劳斯定理的逆定理可知, L 、 M 、 N 三点共线, 原定理得证。□

逆定理证明. 设 O 为 AA' 与 CC' 的交点, 需证 BB' 也通过点 O (或 $AA' \parallel BB' \parallel CC'$)。

在 $\triangle LCC'$ 和 $\triangle NAA'$ 中, 对应顶点的连线共点于 M , 由笛沙格原定理可知, 其对边交点 B 、 O 、 B' 必共线, 即 BB' 通过点 O 。

若 $AA' \parallel CC'$, 则必有 $AA' \parallel BB'$ (否则 CC' 会通过 AA' 与 BB' 的交点, 与 “ $AA' \parallel CC'$ ” 的假设矛盾), 故对应顶点的连线平行。逆定理得证。□

定理 3.3 (塞瓦 (Ceva) 定理). (梅涅劳斯定理的对偶命题) 设 P 、 Q 、 R 分别是 $\triangle ABC$ 的边 BC 、 CA 、 AB 上的点, 则 AP 、 BQ 、 CR 相交于一点 M 的充要条件是

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1.$$

(也是按照顺序来封闭)

注:

- M 称为塞瓦点;
- M 在三角形外同样成立, 但不能在边上 (否则会重合);
- 有向线段表示: 点 M 在 $\triangle ABC$ 内或外均满足该比例;
- 记忆: 同梅涅劳斯定理的对偶形式;
- 中线、角平分线、高线 ($Rt\triangle$ 除外) 均满足该定理。

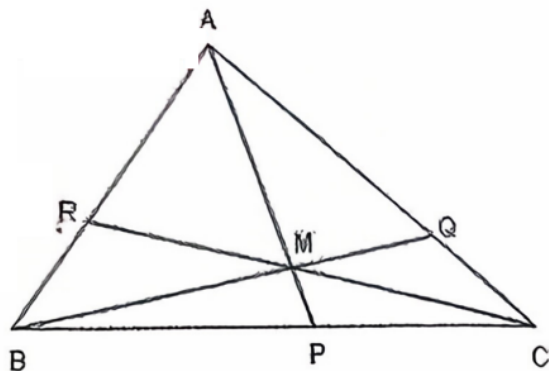


图 3.8: 塞瓦定理

证明. **必要性** (由交点分成的三角形面积比) 利用面积比例关系, 有

$$\frac{AR}{RB} = \frac{S_{\triangle CMA}}{S_{\triangle CMB}}, \quad \frac{BP}{PC} = \frac{S_{\triangle AMB}}{S_{\triangle AMC}}, \quad \frac{CQ}{QA} = \frac{S_{\triangle BMC}}{S_{\triangle BMA}}.$$

将三式相乘, 约去公共项后即得

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1.$$

充分性 设 AP 与 BQ 相交于 M , 边 CM 交 AB 于 R' . 由必要性的结论, 有

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR'}{R'B} = 1,$$

结合题设条件

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1,$$

两式相除得

$$\frac{AR'}{R'B} = \frac{AR}{RB}.$$

由点内分线段 AB 成定比的点的唯一性可知, $R \equiv R'$, 故 AP 、 BQ 、 CR 相交于一点 M , 充分性得证。□

定理 3.4 (西姆松 (Simson) 定理). 三角形外一点在三角形外接圆上的充要条件是该点在三角形三边所在直线上的射影 (垂足) 共线。

证明. 设 $\triangle ABC$ 外一点为 P , P 在 BC 、 CA 、 AB 所在直线上的射影 (垂足) 分别为 L 、 M 、 N 。

1. 由射影得四点共圆: 由 $PL \perp BC$ 、 $PN \perp AB$, 知 P 、 B 、 L 、 N 四点共圆, 故 $\angle 1 = \angle 2$; 由 $PN \perp AB$ 、 $PM \perp AC$, 知 P 、 N 、 A 、 M 四点共圆, 故 $\angle 3 = \angle 4$ 。

2. 充要条件推导: P 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上 (即 P 、 B 、 C 、 A 共圆)

$$\iff \angle PBC = \angle PAM \quad (\text{同弧所对圆周角相等})$$

$$\iff \angle 2 = \angle 4 \quad (\text{对顶角相等})$$

$$\iff \angle 1 = \angle 3 \quad (\text{由 } \angle 1 = \angle 2, \angle 3 = \angle 4)$$

$$\iff L, N, M \text{ 三点共线} \quad (\text{内错角相等, 两直线共线})$$

□

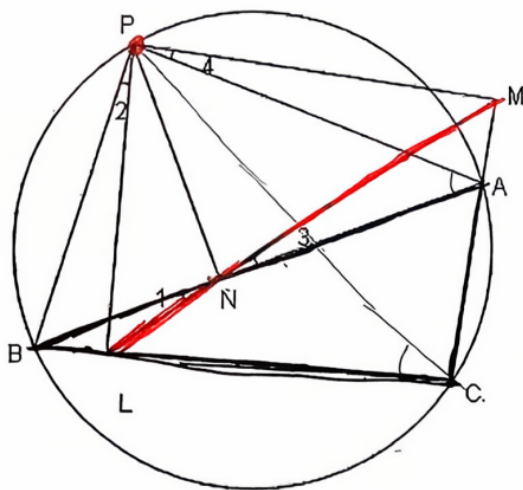


图 3.9: 西姆松定理

注：西姆松定理把四点共圆及三点共线联系在一起，直线 LMN 称为 $\triangle ABC$ 关于点 P 的**西姆松线**。

定理 3.5 (托勒密 (Ptolemy) 定理). 凸四边形 $ABCD$ 内接于圆的充要条件是

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD.$$

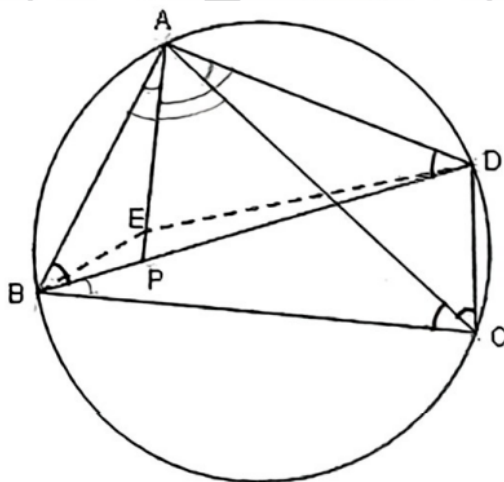


图 3.10: 托勒密定理证法一

证明. **必要性** 设凸四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$ ，在对角线 BD 上取点 P ，使得 $\angle PAB = \angle CAD$ 。

由 $\angle PAB = \angle CAD$ 且 $\angle ABP = \angle ACD$ (同弧 AD 所对圆周角相等)，得

$$\triangle ABP \sim \triangle ACD,$$

因此

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BP}{CD} \implies AB \cdot CD = AC \cdot BP.$$

又 $\angle BAC = \angle PAD$ (由 $\angle PAB = \angle CAD$ 两边同时加 $\angle PAC$)，且 $\angle ACB = \angle ADP$ (同弧 AB 所对圆周角相等)，得

$$\triangle ABC \sim \triangle APD,$$

因此

$$\frac{BC}{PD} = \frac{AC}{AD} \implies BC \cdot AD = AC \cdot PD.$$

将两式相加：

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BP + AC \cdot PD = AC \cdot (BP + PD) = AC \cdot BD.$$

充分性 在凸四边形 $ABCD$ 内取点 E ，使得 $\angle BAE = \angle CAD$ 且 $\angle ABE = \angle ACD$ ，则

$$\triangle ABE \sim \triangle ACD,$$

因此

$$\frac{AD}{AE} = \frac{AC}{AB} = \frac{CD}{BE} \implies AB \cdot CD = AC \cdot BE.$$

由 $\angle BAE = \angle CAD$ ，两边同时加 $\angle EAC$ 得 $\angle DAE = \angle CAB$ 。结合比例式 $\frac{AD}{AE} = \frac{AC}{AB}$ ，得

$$\triangle ADE \sim \triangle ACB,$$

因此

$$\frac{AD}{AC} = \frac{ED}{BC} \implies AD \cdot BC = AC \cdot ED.$$

将两式相加：

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BE + AC \cdot ED = AC \cdot (BE + ED).$$

由三角不等式， $BE + ED \geq BD$ ，当且仅当 E 在对角线 BD 上时等号成立（此时 $\angle ABE = \angle ABD = \angle ACD$ ，即 A, B, C, D 四点共圆）。故

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$$

当且仅当凸四边形 $ABCD$ 内接于圆时成立。 □

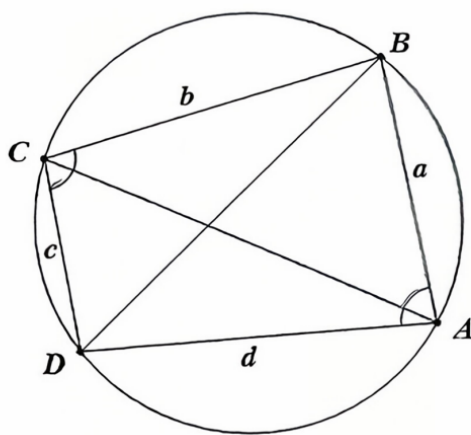


图 3.11: 托勒密定理证法二

证明. 设 $\angle BAD = A$ ， $\angle BCD = C$ 。在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle BCD$ 中分别应用余弦定理：

$$\cos A = \frac{a^2 + d^2 - DB^2}{2ad} \tag{1}$$

$$\cos(180^\circ - A) = \cos C = \frac{b^2 + c^2 - DB^2}{2bc} \quad (2)$$

将 (1) 与 (2) 相加并令其等于 0:

$$0 = (1) + (2) \implies \frac{a^2 + d^2 - DB^2}{2ad} + \frac{b^2 + c^2 - DB^2}{2bc} = 0$$

整理后解得 DB^2 :

$$DB^2 = \frac{ad(b^2 + c^2) + bc(a^2 + d^2)}{ad + bc} = \frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc}$$

同理可得对角线 AC^2 的表达式:

$$AC^2 = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}$$

将两式相乘并化简:

$$AC \cdot BD = \sqrt{AC^2 \cdot DB^2} = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc} \cdot \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}} = ac + bd$$

注: 只用余弦定理和因式分解

□

定理 3.6 (九点圆定理). 任意三角形三条高的垂足、三边的中点以及垂心与顶点的三条连线的中点, 这九点共圆。

注: 此圆称为费尔巴哈圆, 早年为欧拉所知, 费尔巴哈于 1822 年再度发现后, 通常称其为费尔巴哈圆。

证明. 证法一

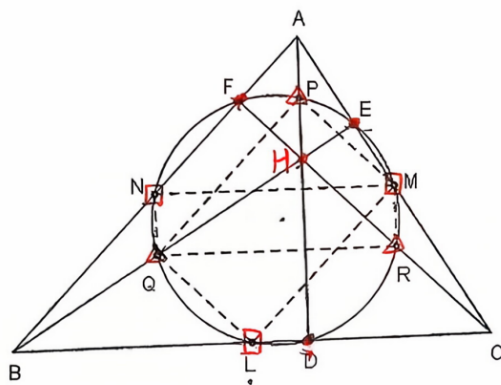


图 3.12: 九点圆定理证法一

设 AD 、 BE 、 CF 为 $\triangle ABC$ 的高, 垂心为 H ; L 、 M 、 N 分别为 BC 、 CA 、 AB 的中点; P 、 Q 、 R 分别为 AH 、 BH 、 CH 的中点。

由中位线性质, $NM \parallel QR \parallel \frac{1}{2}BC$, $NQ \parallel MR \parallel \frac{1}{2}AH$ 。因 $AH \perp BC$, 故 $NQ \perp QR$, 即四边形 $NQRM$ 为矩形。同理, 四边形 $QLMP$ 为矩形。

矩形的对角线为其外接圆的直径, 故 QM 、 LP 、 NR 是同一个圆的三条直径, 因此 L 、 M 、 N 、 P 、 Q 、 R 六点共圆。

又 $\angle PDL = 90^\circ$, 故点 D 在以 LP 为直径的圆上。同理, 垂足 E 、 F 也在此圆上。因此, 九点共圆。

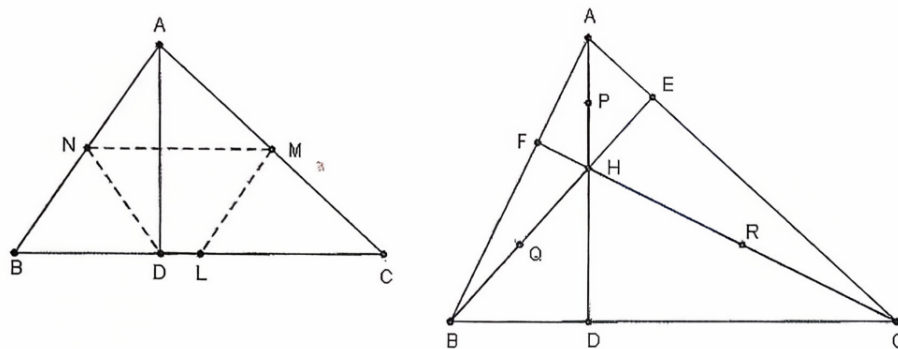


图 3.13: 九点圆定理证法二

证法二

分两步证明。先证各边中点构成的三角形的外接圆过三角形三边的垂足：

由中位线性质， $ML \parallel \frac{1}{2}AB$ ；在 $Rt\triangle ABD$ 中， $ND = \frac{1}{2}AB$ （直角三角形斜边中线等于斜边的一半），故 $ML = ND$ 且 $ML \parallel ND$ ，即四边形 $MNDL$ 为等腰梯形，因此 $M、N、D、L$ 共圆。同理可证垂足 $E、F$ 也在 $\triangle MNL$ 的外接圆上。

再证三个高的垂足决定的三角形外接圆通过垂心到各顶点线段的中点：

研究 $\triangle BCH$ ，其各边垂足 $D、E、F$ 所决定的三角形外接圆过三边的中点（由 ），即 $R、Q$ 在该圆上。同理， P 也在该圆上。

综上所述： $D、E、F、M、N、L、P、Q、R$ 九点共圆。 $\square$

定理 3.7 (四心共线定理). 三角形的外心、垂心、重心、九点圆圆心共线；且九点圆心在外心与垂心连线的中点，重心在外心与垂心的三分点处。

注：该定理也称为欧拉定理，四心所决定的线称为欧拉线。该定理是欧拉一篇论文的成果。

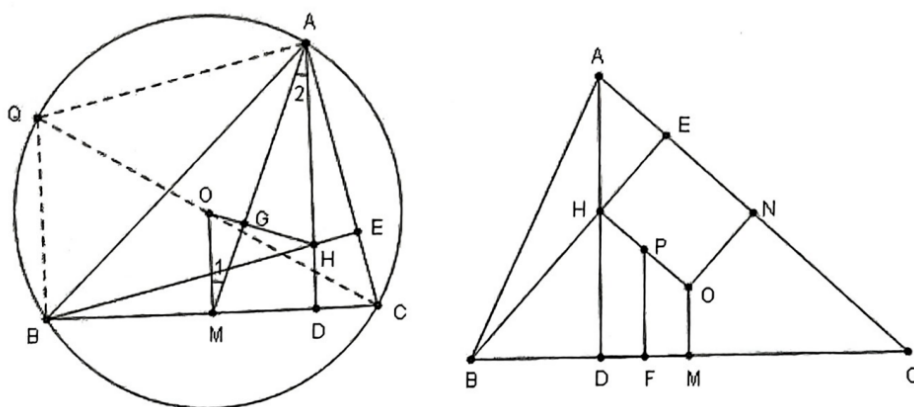


图 3.14: 四心共线定理

证明. 设 $\triangle ABC$ 的外心、重心、垂心、九点圆圆心分别为 $O、G、H、P$ ，下证 $O、G、H、P$ 共线，且 $OG = \frac{1}{2}GH$ ， $OP = PH$ 。

分两步证明：

证明 O, G, H 共线且 $OG = \frac{1}{2}GH$ 延长 AH, AG 交 BC 于 D, M , 则 $AD \perp BC$ (垂心定义), $OM \perp BC$ (外心与弦中点连线垂直于弦), 故 $AD \parallel OM$, 从而 $\angle OMG = \angle GAH$ 。

延长 CO 交外接圆于 Q , 连接 QA, QB , 则 QC 为外接圆的直径, 因此 $QB \perp BC, QA \perp AC$ 。由 $AD \perp BC$ 及 $BE \perp AC$ (垂心定义), 知 $QB \parallel AD, QA \parallel BE$, 故四边形 $QBHA$ 为平行四边形, 从而 $QB = AH$ 。

由中位线性质, $OM = \frac{1}{2}QB = \frac{1}{2}AH$; 又 G 为重心, 故 $GM = \frac{1}{2}AG$ 。因此 $\triangle OMG \sim \triangle HAG$ (两边成比例且夹角相等), 于是 O, G, H 共线且 $OG = \frac{1}{2}GH$ 。

证明 O, P, H 共线且 $PH = OP$ 设 O 为外心, M, N 为 BC, AC 的中点, H 为垂心, 则 $AD \perp BC, OM \perp BC$, 故 $AD \parallel OM$ 。

作 DM 的中垂线 PF 交 OH 于 P , 则 $MO \parallel PF \parallel HD$, 故 P 是 OH 的中点。同理, AC 边上的中点 N 与 H 在 AC 边上的射影 E 之间的中垂线也交 OH 于点 P , 故 P 为九点圆圆心 (DM, EN 分别是九点圆的弦, 弦的中垂线过九点圆圆心), 且 P 平分 OH , 即 $PH = OP$ 。

综上, O, G, H, P 四点共线, 且满足 $OG = \frac{1}{2}GH, OP = PH$ 。 $\square$

定理 3.8 (斯特瓦尔特定理). 设 B, P, C 分别为从 A 点引出的三条射线 AB, AP, AC 上的点, 则 B, P, C 共线的充要条件是

$$AP^2 = AB^2 \cdot \frac{PC}{BC} + AC^2 \cdot \frac{BP}{BC} - BP \cdot PC.$$

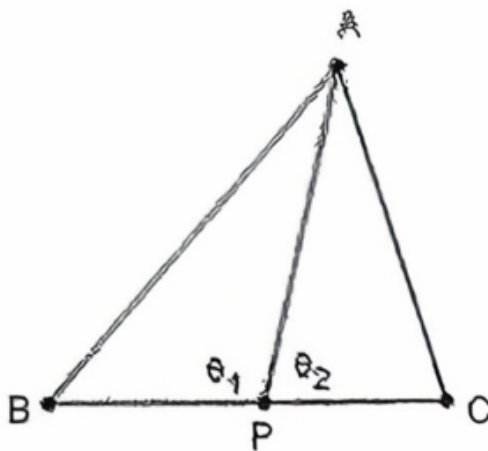


图 3.15: 斯特瓦尔特定理

证明. 设 $\angle APB = \theta_1, \angle APC = \theta_2$, 不失一般性, 设 $\theta_2 < 90^\circ$ 。

对 $\triangle ABP$ 和 $\triangle APC$ 分别应用余弦定理:

$$AB^2 = AP^2 + BP^2 - 2AP \cdot BP \cdot \cos \theta_1,$$

$$AC^2 = AP^2 + CP^2 - 2AP \cdot CP \cdot \cos \theta_2.$$

将上述两式分别乘以 PC 和 PB 后相加, 得

$$\begin{aligned} & AB^2 \cdot CP + AC^2 \cdot BP \\ &= AP^2(BP + CP) + BP \cdot CP(BP + CP) - 2AP \cdot BP \cdot CP(\cos \theta_1 + \cos \theta_2). \end{aligned} \quad (*)$$

于是

$$B, P, C \text{ 共线} \iff (*) \text{ 式右边} = AP^2 \cdot BC + BP \cdot CP \cdot BC$$

$$\iff AP^2 = AB^2 \cdot \frac{PC}{BC} + AC^2 \cdot \frac{BP}{BC} - BP \cdot PC.$$

□

注：定理的必要性即为斯特瓦尔特定理，充分性即为斯特瓦尔特定理的逆定理。斯特瓦尔特定理还有如下一系列有趣推论：

1. 若 $AB = AC$ ，则 $AP^2 = AB^2 - BP \cdot PC$ ；
2. 若 P 为 BC 中点，则 $AP^2 = \frac{1}{2}AB^2 + \frac{1}{2}AC^2 - \frac{1}{4}BC^2$ ；
3. 若 AP 平分 $\angle BAC$ ，则 $AP^2 = AB \cdot AC - BP \cdot PC$ ；
4. 若 AP 平分 $\angle BAC$ 的外角，则 $AP^2 = BP \cdot PC - AB \cdot AC$ 。

3.3 四边形及其性质

本节所讲的四边形模型在立体几何线面垂直的证明中特别有用。

常用结论汇总

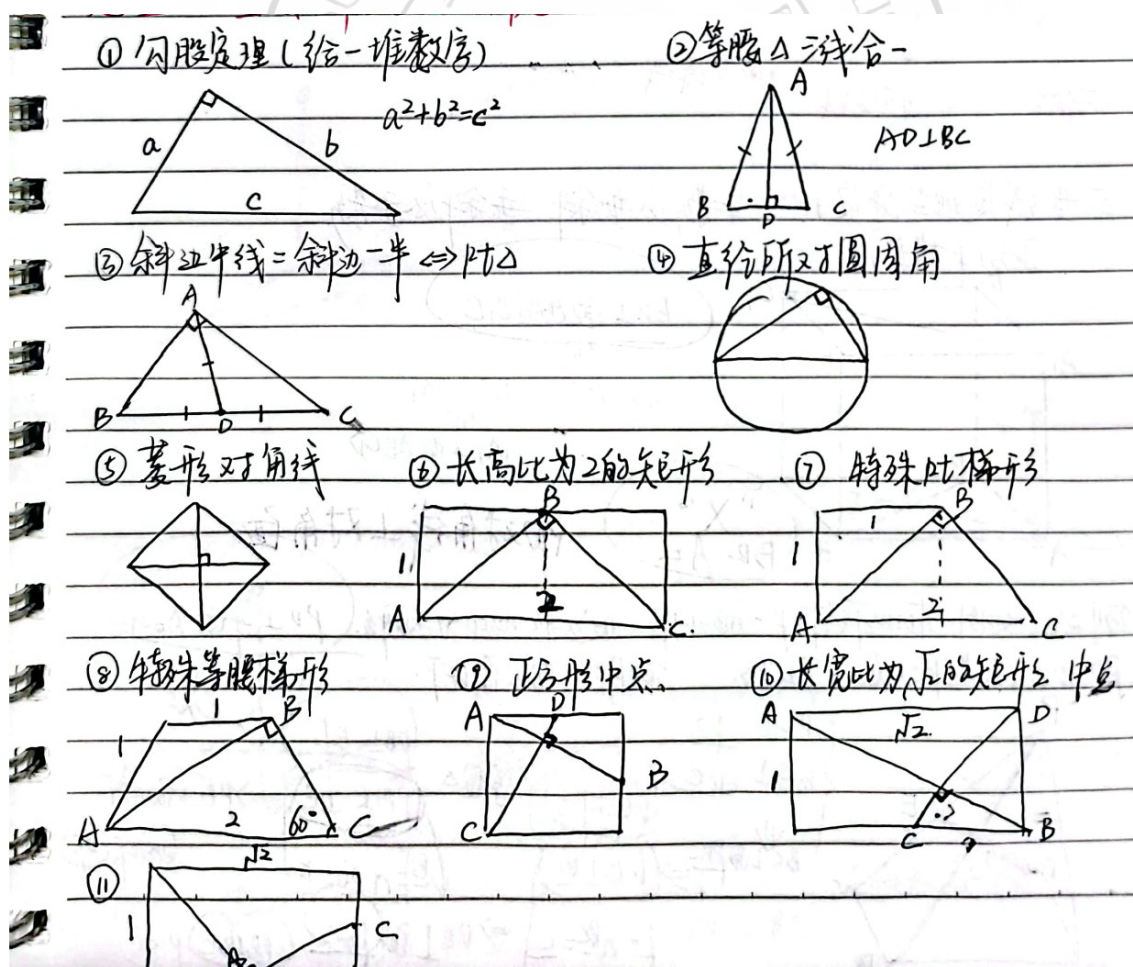


图 3.16: 高一时候记的笔记 (来自刘天麒老师的传授)

3.4 圆及其性质

角

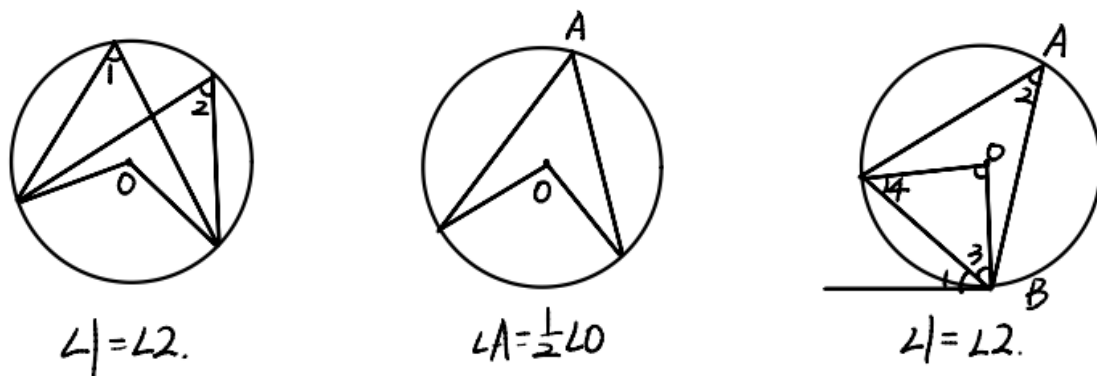


图 3.17: 初中学过的圆的性质

1. 同弧所对的圆周角相等。

$$\angle 1 = \angle 2$$

2. 圆周角 = $\frac{1}{2}$ 圆心角。

$$\angle A = \frac{1}{2} \angle O$$

3. 切线和弦所夹角 = 所夹弧所对的圆周角 (弦切角定理)。

$$\angle 1 = \angle 2$$

圆幂定理

1. 相交弦定理:

$$AP \cdot PC = PB \cdot PD$$

推导: $\triangle APB \sim \triangle DPC$ (弦交相似)。

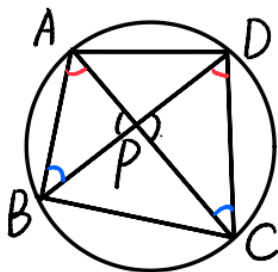


图 3.18: 相交弦定理

2. 切割线定理:

$$PA^2 = PB \cdot PC$$

推导: $\triangle PBA \sim \triangle PAC \Rightarrow \frac{PA}{PB} = \frac{PC}{PA} \Rightarrow PA^2 = PB \cdot PC$ 。

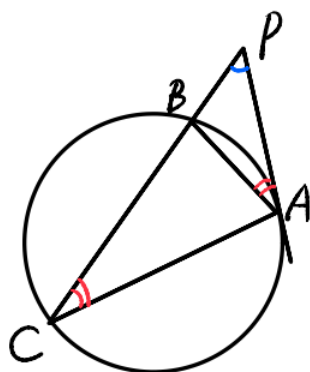


图 3.19: 切割线定理

3. 割线定理:

$$PA \cdot PB = PD \cdot PC$$

推导: $PE^2 = PA \cdot PB = PD \cdot PC$; $\angle PAD = \angle C$ 且 $\angle APD = \angle CDB \Rightarrow \triangle PAD \sim \triangle PCB \Rightarrow \frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB} \Rightarrow PA \cdot PB = PD \cdot PC$ 。

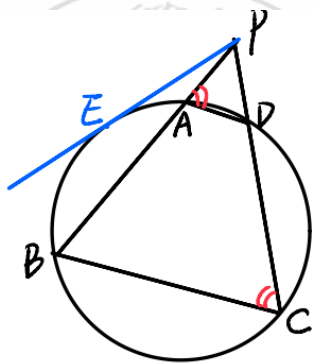


图 3.20: 割线定理

圆幂

1. 定义: 点 P 关于圆 O 的圆幂

$$op(P) = PO^2 - R^2$$

2. 圆幂定理:

$$PB \cdot PC = -op(P), PB \cdot PD = -op(P); \quad AP^2 = op(P) = PB \cdot PC$$

3. 符号判断:

$$\begin{cases} P & : & op(P) < 0 \\ P & : & op(P) > 0 \end{cases}$$

四点共圆

证明四点共圆通常考虑以下方法:

1. 对角互补 $\Leftrightarrow$ 四点共圆 ($\Rightarrow$ 反证法, $\Leftarrow$ 同弧)
2. 张角相等 $\Leftrightarrow$ 四点共圆 ($\Rightarrow$ 同弧 $\Leftarrow$ 1.)
3. 相交弦定理
4. 割线定理



B 集合论与数理逻辑

4 现代数学的根基——集合论与数理逻辑初步

4.1 集合的定义与运算

从**罗素悖论**（理发师悖论）谈起：在一个小镇上，有一位理发师，他只给那些不给自己理发的人理发，并且给所有不给自己理发的人理发。

那么他到底给不给自己理发？如果他给自己理发，根据“他只给不给自己理发的人理发”，推出他不给自己理发；如果他不给自己理发，根据“他要给所有不给自己理发的人理发”，他自己也属于这类人，推出他要给自己理发。无论如何，都可以从给（不给）自己理发推出不给（给）自己理发。

19 世纪末，罗素悖论引发了第三次数学危机，揭露了朴素集合论的缺陷。为化解危机，数学界发起**公理化运动**（只用集合与映射两种工具定义一切数学对象来规避悖论），“集合论之父”康托尔创立的**集合论**是现代数学公理化体系的核心根基，也是现代数学的基础语言。

以下是一些基本的定义，定理和命题。

子集 对于集合 A, B ，如果 $x \in A$ 可推出 $x \in B$ ，则称 A 是 B 的子集，记为 $A \subset B$ 。有个性质是高中同学容易忽略的：

命题 对于集合 A, B ，“ $A = B$ ”的充分必要条件是“ $A \subset B$ 且 $B \subset A$ ”。读者应当把集合的相互包含（“ $A \subset B$ 且 $B \subset A$ ”）作为集合相等的等价定义。

幂集 设 A 为集合，则 A 的所有子集也构成一个集合，记为 2^A ：

$$2^A := \{B \mid B \subset A\},$$

如果 A 有 n 个元素，则 2^A 有 2^n 个元素。例如， $A = \{1, 2\}$ ，则 $2^A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ 。

并集与交集 设 A, B 为集合，由 A 中所有元素和 B 中所有元素组成的集合为 A 和 B 的并集，记为 $A \cup B$ ：

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

由 A 和 B 中公共元素组成的集合为 A 和 B 的交集，记为 $A \cap B$ ：

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

集合的运算性质如下，证明都是直接的。

命题 设 A, B, C 为集合，则

1. 交换律： $A \cup B = B \cup A$ ， $A \cap B = B \cap A$ ；
2. 结合律： $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ ， $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ ；
3. 分配律： $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ， $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ 。

补集 设集合 A 是集合 X 的子集，由 X 中不属于 A 的所有元素组成的集合称为 A 在 X 中的补集，记为 A^c （高中时记为 $\complement_X A$ ，但这里记为 A^c ），即

$$A^c := \{x \in X \mid x \notin A\}.$$

若 A, B 都是集合 X 的子集, 由属于 A 但不属于 B 的所有元素组成的集合叫 A 与 B 的差集, 记为 $A \setminus B$. 于是 $A^c = X \setminus A$.

命题 设 A, B 为 X 的子集, 则

1. $(A^c)^c = A, A^c \cup A = X, A^c \cap A = \emptyset$.
2. $A \setminus B = A \cap B^c, (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A \cup B \setminus A \cap B$;
3. De Morgan 律: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

证明: 我们以 De Morgan 律的第一条式子的证明为例. 要证明 $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, 只需证明相互包含.

若 $x \in (A \cup B)^c$, 则 $x \notin A \cup B$, 则 $x \notin A$ 且 $x \notin B$, 则 $x \in A^c$ 且 $x \in B^c$, 则 $x \in A^c \cap B^c$, 这说明 $(A \cup B)^c \subset A^c \cap B^c$.

反之, 设 $x \in A^c \cap B^c$, 则 $x \in A^c$ 且 $x \in B^c$, 则 $x \notin A$ 且 $x \notin B$, 则 $x \notin A \cup B$, 则 $x \in (A \cup B)^c$, 这说明 $A^c \cap B^c \subset (A \cup B)^c$. $\square$

例 已知集合 A, B, C 满足 $A \cap B = A, B \cap C = B$, 证明 $A \subset C$.

证明: 要证明 $A \subset C$, 只需要证明当 $x \in A$ 时, $x \in C$.

设 $x \in A$, 由于 $A \cap B = A$, 则 $x \in A \cap B$, 从而 $x \in B$. 由于 $B \cap C = B$, 则 $x \in B \cap C$, 从而 $x \in C$. $\square$

4.2 映射及其性质

集合是人们对研究对象的一种抽象化. 当我们研究不同性质的对象之间的关系时, 集合到集合之间的对应就必须加以考虑.

映射 设 X, Y 是集合, 如果对于每个元素 $x \in X$, 都有 Y 中唯一元素 y 与之对应, 则称这种对应关系为从 X 到 Y 的一个映射, 记为

$$f: X \rightarrow Y, y = f(x),$$

或

$$f: X \rightarrow Y, x \mapsto f(x).$$

把 $y = f(x)$ 叫 x 在 f 下的像, x 称为 y 的一个原像, 集合 X 叫 f 的定义域, f 的像的全体组成的集合

$$f(X) := \{f(x) \mid x \in X\}$$

是 Y 的子集, 叫做 f 的值域 (或者像集).

映射有时也叫函数, 特别是当 $Y \subset \mathbb{R}$ 时更是如此. 如果 $X, Y \subset \mathbb{R}$ 都是数集, 映射 $f: X \rightarrow Y$ 叫一元实值函数.

接下来的内容中会用到下面的函数:

示性函数 设 A 是 X 的子集, 定义函数 $\chi_A: X \rightarrow \mathbb{R}$ 为

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \in X \setminus A. \end{cases}$$

这个函数叫 A 的示性函数, 且 $A \neq B$ 当且仅当 $\chi_A \neq \chi_B$.

单射, 满射, 双射 设 $f: X \rightarrow Y$ 为映射, 如果对任意 $x_1, x_2 \in X$, 当 $x_1 \neq x_2$ 时均有 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 则称 f 为单射; 如果 $f(X) = Y$, 即对任意 $y \in Y$, 存在 $x \in X$ 使得 $y = f(x)$, 则称 f 为满射. 如果 f 既是单射又是满射, 则称 f 为双射 (一一映射).

注: 证明一个映射是单射的方法也可以是: 设 $f(x_1) = f(x_2)$, 证明 $x_1 = x_2$.

例 定义映射 $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{N}$ 如下:

$$f(n) = n - 1, \forall n \in \mathbb{Z}^+,$$

则 f 是集合 $\mathbb{Z}^+$ 和 $\mathbb{N}$ 之间的双射.

可数 对于集合 X , 如果存在映射 $f: X \rightarrow \mathbb{N}$ 使得映射 f 为一一映射, 则称 X 是可数 (countable) 的.

如果 X 是有限集或可数集, 称 X 是至多可数集. 至多可数集之外的集合称为不可数集.

对于可数集 X , 可以把集合 X 的元素如下排列:

$$\begin{array}{ccccccc} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow & \dots \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n & \dots \end{array}$$

映射 $x_i \mapsto i$ 就是集合 X 与自然数集 $\mathbb{N}$ 之间的双射, 于是如果集合 X 的所有元素可以排成一列, 那么 X 就是可数集. 由前一例子, $\mathbb{Z}^+$ 是可数集.

例 $\mathbb{Z}$ 是可数集.

证明: 把 $\mathbb{Z}$ 如下排列:

$$\mathbb{Z}: 0, -1, 1, -2, 2, \dots, -n, n, \dots,$$

则 $\mathbb{Z}$ 为可数集. □

例 $\mathbb{Q}$ 是可数集.

证明: 有理数均可表示为 $\frac{m}{n}$, 按照如下顺序排列:

$$\mathbb{Q}: \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \dots$$

然后把后面重复的数删掉, 那么就得到了 $\mathbb{Q}$ 的排列. 因此 $\mathbb{Q}$ 是可数集. (对每个有理数 r , 可取 $n \in \mathbb{N}$ 使得存在 $m \in \mathbb{Z}$, $\frac{m}{n} = r$ 且 n 是满足这个条件的最小者) □

例 $\mathbb{R}$ 不是可数集.

证明: 在学习数学分析的过程中我们将用“闭区间套原理”来证明, 超出了这里的范围. 不过我们先暂时默认这是正确的结论. □

笛卡尔积 设 A, B 为集合, 定义 A 和 B 的笛卡尔积为

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}.$$

约定当 A 或 B 为空集时, $A \times B$ 也是空集.

有时为了简洁起见, 把 $A \times A$ 记为 A^2 .

例 记 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5\}$, 则 $A \times B = \{(1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)\}$. 一般地容易证明, 如果 A, B 分别有 m, n 个元素, 则 $A \times B$ 有 mn 个元素.

例 平面直角坐标系 xOy 上的所有点构成的集合为 $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$.

笛卡尔积也可以推广到有限个集合的情形, 例如 n 维空间上的所有点构成的集合是

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

例 如果 A, B 都是可数集, 则 $A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$ 也是可数集.

证明: 记 $A = \{a_1, a_2, \dots\}$, $B = \{b_1, b_2, \dots\}$, 则

$$A \times B = \{(a_i, b_j) \mid i, j = 1, 2, \dots\},$$

按“字典法则”把 $A \times B$ 中的元素排成一列:

$$(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_1, b_3), (a_2, b_2), (a_3, b_1), \dots$$

字典法则就是当 $i + j < k + l$ 或 $i + j = k + l$ 但 $i < k$ 时, 要求 (a_i, b_j) 排在 (a_k, b_l) 前面. $\square$

例 设 a, b 为固定的实数, 如下定义映射

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + ax + b,$$

则

$$f(x) = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + b - \frac{a^2}{4} \geq b - \frac{a^2}{4}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

所以 f 不是满射. 不难看出 f 也不是单射.

复合映射 设 $f: Y \rightarrow Z$, $g: X \rightarrow Y$ 为映射, 定义映射

$$f \circ g: X \rightarrow Z, f \circ g(x) = f(g(x)), x \in X,$$

称它为 f 和 g 的复合映射.

例 已知正弦函数

$$f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1], f(x) = \sin x$$

反比例函数

$$g: (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \rightarrow (-\infty, 0) \cup (0, +\infty), g(x) = \frac{1}{x}.$$

定义复合映射 $h = g \circ f$, 则 $h(x) = g(f(x)) = \frac{1}{\sin x}$, 把 $h(x)$ 记为 $\csc x$, 叫余割函数. 把上面的正弦函数换为余弦函数以后, 可以定义正割函数 $\sec x$. 此外可以定义余切函数.

$$\csc x := \frac{1}{\sin x}, \sec x := \frac{1}{\cos x}, \cot x := \frac{\cos x}{\sin x}.$$

这三个函数在高中没有讲, 但是在大学数学教材可能会出现这样的记号.

4.3 命题与量词

命题

大家在初中已经对命题有了基本了解: 命题要么是真, 要么是假, 不能既真又假, 也不能既不真也不假. 这是在说任何命题都有一个“真值”, 用来刻画命题的真假, 真值是 T 表示真命题, 真值是 F 表示假命题, 以下简记为 T 和 F.

命题的英文是 proposition, 我们通常用 p, q, r 表示命题, 用 $\Leftrightarrow$ 表示两个命题的真值相同.

一元运算: 设 S 是一个非空集合, 若存在映射 $f: S \rightarrow S$, 即对集合 S 中的每一个元素 a , 都能通过 f 唯一确定 S 中的一个元素 $f(a)$, 则称 f 为集合 S 上的一元运算.

一元运算是从一个集合到自身的映射, 一个输入, 一个输出。

例子:

- 整数集 $\mathbb{Z}$ 上的相反数运算: $f(a) = -a$ (每个整数对应唯一的相反数, 仍属于 $\mathbb{Z}$);
- 实数集 $\mathbb{R}$ 上的绝对值运算: $f(a) = |a|$ (每个实数对应唯一的绝对值, 仍属于 $\mathbb{R}$);
- 集合 S 的幂集 2^S 上的补集运算: $f(A) = A^c$ ($A \subset S$, 补集 A^c 仍属于 2^S).

二元运算: 设 S 是一个非空集合, 若存在映射 $f: S \times S \rightarrow S$, 即对集合 S 中的任意两个元素 a, b (有序对 (a, b)), 都能通过 f 唯一确定 S 中的一个元素 $f(a, b)$, 则称 f 为集合 S 上的二元运算。

二元运算是从一个集合和它自己的笛卡尔积到自身的映射, 两个输入, 一个输出。

为便于书写, 二元运算常记为 $\circ$, 即 $f(a, b) = a \circ b$ 。

例子:

- 整数集 $\mathbb{Z}$ 上的加法运算: $a \circ b = a + b$ (任意两个整数的和仍为整数);
- 实数集 $\mathbb{R}$ 上的乘法运算: $a \circ b = a \times b$ (任意两个实数的积仍为实数);
- 非零实数集 $\mathbb{R}^*$ 上的除法运算: $a \circ b = \frac{a}{b}$ (任意两个非零实数的商仍为非零实数);
- $\mathbb{Z}$ 上的除法不是二元运算 (如 $1 \div 2 \notin \mathbb{Z}$, 不满足封闭性)。

与, 或, 非

与、或、非分别用 $\wedge, \vee, \neg$ 表示, 下面给出它们的定义:

- “与” 是一个二元运算 $f: S \times S \rightarrow S$,

$$(T, T) \mapsto T, \quad \text{其他情况} \mapsto F$$

- “或” 是一个二元运算 $f: S \times S \rightarrow S$,

$$(F, F) \mapsto F, \quad \text{其他情况} \mapsto T$$

- “非” 是一个一元运算 $f: S \rightarrow S$,

$$F \mapsto T, \quad T \mapsto F$$

注:

- 我们只用了集合与映射两个工具来定义上述逻辑运算;
- 与 ($\wedge$)、或 ($\vee$)、非 ($\neg$) 的含义和符号, 均与集合的交 ($\cap$)、并 ($\cup$)、补 (c) 相同 (相似)。

命题有如下 (一部分) 的运算律:

结合律:

$$p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$$

proof: 左边和右边是真命题当且仅当 p, q, r 同真.

$$p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$$

proof: 用假命题验证, 类似.

交换律:

$$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$$

双重否定律:

$$\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$$

恒等律:

$$p \wedge T \Leftrightarrow p$$

$$p \vee F \Leftrightarrow p$$

注:

- 我们会习惯性地考虑一个运算在一个集合上的单位元, 例如我们知道任何数加 0 (乘 1) 都是它自身, 这相当于加法 (乘法) 的单位元性质。所以称数字 0 (1) 为加 (乘) 法单位元。
- 恒等律告诉我们, T 和 F 分别是“与”和“或”运算的单位元。
- 数集中的加法单位元和乘法单位元都是唯一的 (如果存在的话), 但是“与”和“或”运算的单位元不唯一 (T 和 F 不唯一)。

支配律: 交换 T 和 F 会得到下面的“支配律”:

$$p \vee T \Leftrightarrow T \text{ (永真命题)}$$

$$p \wedge F \Leftrightarrow F \text{ (永假命题)}$$

幂等律:

$$p \vee p \Leftrightarrow p$$

$$p \wedge p \Leftrightarrow p$$

否定律:

$$p \vee (\neg p) \Leftrightarrow T \text{ (永真命题)}$$

$$p \wedge (\neg p) \Leftrightarrow F \text{ (永假命题)}$$

注: $p \vee (\neg p) \Leftrightarrow T$ 给出了分类讨论的依据, 因为 p 和 $\neg p$ 有一个为真, 相当于“与”上了一个真命题, 接下来用下面的“分配律”就可以代进去分类讨论。

分配律: 类似于乘法对加法有分配律, “与”对“或”也有分配律:

$$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

“或”对“与”也有分配律:

$$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

注:

- 若一个运算不满足交换律，则分配律要分为“左分配律”和“右分配律”。
- “或”对“与”具有双向分配律，这是我们之前所认识不到的。

De Morgan 律:

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p) \vee (\neg q)$$

$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p) \wedge (\neg q)$$

注:De Morgan 律揭示了 $\wedge$ 和 $\vee$ 是完全对称的，命题也是完全对称的。

量词

全称量词与存在量词

在命题研究中，仅讨论简单命题的运算不足以描述复杂数学规律，需引入量词刻画“全体”或“部分”对象的性质：

全称量词（任意）：符号记为 $\forall$ （读作“对任意的”“对所有的”），用于表示某一集合中所有元素都满足某一性质。

定义：设集合 S ，性质 $P(x)$ 是关于 $x \in S$ 的命题，则 $\forall x \in S, P(x)$ 表示“对任意 $x \in S$ ， $P(x)$ 为真命题”。

例子：

- $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$ （对任意实数 x ， x 的平方非负，真命题）；
- $\forall x \in \mathbb{Z}, 2x$ 是偶数（对任意整数 x ， $2x$ 是偶数，真命题）；
- $\neg(\forall x \in S, P(x)) \Leftrightarrow \exists x \in S, \neg P(x)$ （“并非所有元素满足性质”等价于“存在元素不满足性质”）。

存在量词（存在）：符号记为 $\exists$ （读作“存在”“至少有一个”），用于表示某一集合中至少一个元素满足某一性质。

定义：设集合 S ，性质 $P(x)$ 是关于 $x \in S$ 的命题，则 $\exists x \in S, P(x)$ 表示“存在 $x \in S$ ，使得 $P(x)$ 为真命题”。

例子：

- $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 1$ （存在实数 x 使得 $x^2 = 1$ ，真命题， $x = \pm 1$ ）；
- $\exists x \in \mathbb{N}, x < 0$ （存在自然数 x 使得 $x < 0$ ，假命题）；
- $\neg(\exists x \in S, P(x)) \Leftrightarrow \forall x \in S, \neg P(x)$ （“不存在元素满足性质”等价于“所有元素都不满足性质”）。

蕴含命题 ($p \rightarrow q$)

定义：设 p, q 为两个命题， $p \rightarrow q$ （读作“若 p ，则 q ”）表示“ p 蕴含 q ”。

注：

- $p \rightarrow q$ 为假当且仅当“ p 真且 q 假”（唯一假的情况）；
- $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$ （“若 p 则 q ”等价于“非 p 或 q ”）；

逆命题/否命题/逆否命题：

- 逆命题: $q \rightarrow p$;
- 否命题: $\neg p \rightarrow \neg q$;
- 逆否命题: $\neg q \rightarrow \neg p$ (与原命题等价, $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$)。

充分/必要条件

充分条件: 若 $p \rightarrow q$ 为真命题, 则称 p 是 q 的充分条件。

必要条件: 若 $p \rightarrow q$ 为真命题, 则称 q 是 p 的必要条件。

例子: 设 p : “ x 是偶数”, q : “ x 能被 2 整除”, 则 $p \rightarrow q$ 为真。“ x 是偶数”是“ x 能被 2 整除”的充分条件; “ x 能被 2 整除”是“ x 是偶数”的必要条件。

充要条件

定义: 若 $p \rightarrow q$ 且 $q \rightarrow p$ (记为 $p \leftrightarrow q$), 则称“ p 是 q 的充要条件”(也说“ q 是 p 的充要条件”, 或“ p 与 q 等价”);

符号: $p \leftrightarrow q$ (读作“ p 当且仅当 q ”, 简记为 $p \iff q$);

例子:

- “ $x^2 = 1$ ”是“ $|x| = 1$ ”的充要条件 ($x^2 = 1 \iff |x| = 1$);
- “ $\triangle ABC$ 是等边三角形”是“ $\triangle ABC$ 三个内角均为 60° ”的充要条件。

注:

- “ p 是 q 的充分不必要条件”: $p \rightarrow q$ 真, $q \rightarrow p$ 假;
- “ p 是 q 的必要不充分条件”: $p \rightarrow q$ 假, $q \rightarrow p$ 真;
- “ p 是 q 的充要条件”: $p \leftrightarrow q$ 真;
- “ p 是 q 的既不充分也不必要条件”: $p \rightarrow q$ 假, $q \rightarrow p$ 假。

4.4 常用的证明方法

本节介绍证明的几种方法, 这些方法在以后都会频繁用到。

为什么要证明

下面摘自 R. 柯朗, H. 罗宾《什么是数学》, 左平、张饴慈译。

数学, 作为人类思维的表达形式, 反映了人们积极进取的意志、缜密周详的推理以及对完美境界的追求。它的基本要素是: 逻辑和直观、分析和构作、一般性和个别性。

古希腊: 理论化和公理化倾向是一个重要特征, 发展到了欧几里得的《几何原本》趋于成熟。

十七世纪: 解析几何与微积分发展了起来, 但是古希腊清晰和严格推理的方法在数学分析中几乎被抛弃了, “直观”和“本能”在许多重要内容中代替了推理, 这助长了人们盲目相信新方法具有神奇的效果。当时普遍认为, 明确表示微积分的结果不仅是不必要的而且也是不可能的。

然而“第二次数学危机”的爆发正是因为牛顿和莱布尼兹的微积分理论是不严谨的, 并且许多数学家也指出了这套理论的不符合逻辑的地方。

到了十九世纪, 由于数学本身需要巩固已有成果, 而且人们也希望把它推向更高阶段时不会发生问题 (这是受到法国大革命的影响), 就不得不回过头来重新审查这新的数学基础, 特别是微积分

及其赖以建立的极限概念. 因此十九世纪不仅成为一个新的发展时期, 而且也成功地返回到那种准确而严谨的证明为其特征. 在这方面它甚至胜过了希腊科学的典范, 于是, 钟摆又一次向纯粹性和抽象性一侧摆去. 目前我们似乎仍然处于这个时期.

直接证明

等式与不等式的证明

例 证明: $\sin^3 x = \frac{3 \sin x - \sin 3x}{4}$.

证明: 由于

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x,$$

因此

$$\begin{aligned} \sin 3x &= \sin(2x + x) = \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x \\ &= (2 \sin x \cos x) \cos x + (1 - 2 \sin^2 x) \sin x \\ &= 2 \sin x (1 - \sin^2 x) + \sin x - 2 \sin^3 x \\ &= 3 \sin x - 4 \sin^3 x. \end{aligned}$$

整理可得 $\sin^3 x = \frac{3 \sin x - \sin 3x}{4}$. □

例 证明: 对任意 $x, y, z \in \mathbb{R}$, 都有 $|\sin(x - z)| \leq |\sin(x - y)| + |\sin(y - z)|$.

证明: 注意到

$$\begin{aligned} |\sin(x - z)| &= |\sin(x - y + y - z)| \\ &= |\sin(x - y) \cos(y - z) + \cos(x - y) \sin(y - z)| \\ &\leq |\sin(x - y)| |\cos(y - z)| + |\cos(x - y)| |\sin(y - z)| \quad (\text{绝对值不等式}) \\ &\leq |\sin(x - y)| + |\sin(y - z)|. \quad (\text{三角函数的有界性}) \end{aligned}$$

因此欲证不等式成立. □

注: 如果 $a \leq b \leq c$, 那么 $a \leq c$. 这是不等式放缩的基本思想.

如果 $p \Rightarrow q$ 成立, $q \Rightarrow r$ 成立, 那么 $p \Rightarrow r$ 成立

通常要经过一长串的推导才能得到我们想要的命题, 有时也需要分类讨论.

例 设 $\{a_n\}$ 是等比数列, a_n 都是实数, S_n 是 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. **证明:** 数列 $\{S_n\}$ 中或者任一项都不是 0, 或者有无穷多项都是 0.

证明: 等比数列中各项都是非零的, 因此 $a_1 \neq 0$.

1. 当数列 $\{a_n\}$ 的公比为 1 时, $S_n = na_1$, 所以 $\{S_n\}$ 中任一项都不是 0.

2. 当数列 $\{a_n\}$ 的公比不为 1 时, 由等比数列求和公式, $S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$,

(a) 若 $q \neq -1$, 则 $1 - q^n$ 恒不为 0 (即不可能成立 $1 - q^n = 0$), 此时 $\{S_n\}$ 中任一项都不是 0.

(b) 若 $q = -1$, 则当 $n = 2k$ 时, $1 - q^n = 0$, 此时 $S_n = S_{2k} = 0$, $\{S_n\}$ 的偶数项皆为 0. □

例, 2013 辽宁卷 已知点 $O(0, 0)$, $A(0, b)$, $B(a, a^3)$. 若 $\triangle OAB$ 是直角三角形, 则必有

- A. $b = a^3$
- B. $b = a^3 + \frac{1}{a}$
- C. $(b - a^3) \left(b - a^3 - \frac{1}{a} \right) = 0$
- D. $|b - a^3| + \left| b - a^3 - \frac{1}{a} \right| = 0$

证明：由于 $\triangle OAB$ 是直角三角形，但我们不知道哪个角是直角，所以要分类讨论. 注意条件“ $\triangle OAB$ 是直角三角形”可以推出“ O, A, B 三点两两不重合”，因此 $a \neq 0$ 且 $b \neq 0$.

1. 若 O 为直角，则 $OA \perp OB$ ，即 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ ，所以 $a^3b = 0$. 与“ $a \neq 0$ 且 $b \neq 0$ ”矛盾.
2. 若 A 为直角，则 $AO \perp AB$ ，即 $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ ，所以 $b(a^3 - b) = 0$. 由于 $b \neq 0$ ，所以 $a^3 - b = 0$ 即 $b = a^3$.
3. 若 B 为直角，则 $BO \perp BA$ ，即 $\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BA} = 0$ ，所以 $a^2 + a^3(a^3 - b) = 0$. 注意 $a \neq 0$ ，所以可以化简得 $b = a^3 + \frac{1}{a}$.

综合，必有 C 选项成立. □

注： $xy = 0$ 表示 $x = 0$ 或 $y = 0$ ； $|x| + |y| = 0$ ($x^2 + y^2 = 0$) 都表示 $x = 0$ 且 $y = 0$.

例，2020 上海卷 若存在 $a \in \mathbb{R}$ 且 $a \neq 0$ ，对于任意的 x ，均有 $f(x+a) < f(x) + f(a)$ 恒成立，则称函数 $f(x)$ 具有性质 P . 证明下面两个命题都是“ $f(x)$ 具有性质 P ”的充分条件：

- q_1 : $f(x)$ 单调递减且 $f(x) > 0$ 恒成立；
- q_2 : $f(x)$ 单调递增，且存在 $x_0 < 0$ 使得 $f(x_0) = 0$.

证明：这里给出了“ $f(x)$ 具有性质 P ”的定义为“存在 $a \in \mathbb{R}$ 且 $a \neq 0$ ，对于任意的 x ，均有 $f(x+a) < f(x) + f(a)$ 恒成立”，因此验证定义就行了.

1. 若命题 q_1 成立，取 $a = 1$ ，对于任意的 x ，均有 $f(x+1) < f(x) < f(x) + f(1)$ (第一个不等号用单调性，第二个不等号用 $f(x) > 0$ 恒成立)，则 $f(x)$ 满足性质 P .
2. 若命题 q_2 成立，取 $a = x_0$ ，对于任意的 x ，都有 $f(x+x_0) < f(x) = f(x) + f(x_0)$. (第一个不等号用了单调性)，则 $f(x)$ 满足性质 P . □

反证法

对于一个命题，假设原命题不成立（在原命题的条件下，结论不成立），经过正确的推理得到矛盾，从而说明假设错误，这样可以证明原命题成立. 这样的证明方法是反证法.

如果要证明一个命题 q ，用反证法就是要证 $\neg q$ 是假命题. (0 代表假命题)

如果现在要证明一个命题“ $p \Rightarrow q$ ”，反证法就是说设 q 不成立，推出一个矛盾的结论，即证 $(p \wedge \neg q) \equiv 0$.

反证法错误利用：如果已知 A ，求证 B .

- **错证一：**设 B 成立，则 B 和 A 不矛盾（或者满足 A ），从而 B 成立；
- **错证二：**设 B 成立，则 A 成立，而 A 已知，所以 B 成立.

“错证一”错在理由不充足；“错证二”实际上证明了逆命题，不能保证原命题成立.

例 $\sqrt{2}$ 是无理数.

注：把这个命题记作 q ，只需证 $\neg q$ 是假命题即可.

证明：(反证) 如果 $\sqrt{2}$ 不是无理数，则它是有理数. 根据有理数的定义，存在互素的正整数 (最大公约数是 1) m, n ，使得 $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ ，从而 $m = \sqrt{2}n$ ，从而 $m^2 = 2n^2$. 所以 m 是偶数，可设 $m = 2k$ (k 是正整数)，从而 $4k^2 = 2n^2$ ，即 $n^2 = 2k^2$ ，所以 n 也是偶数，但这与 m, n 互素矛盾! (2 是 m, n 的公因数，最大公约数不是 1). 因此假设错误， $\sqrt{2}$ 是无理数. $\square$

注：数学上有许多经典命题的证明都是用反证法，感兴趣的同学可以找资料.

例，唯一性 设 $a \neq 0$ ，则关于 x 的方程 $ax = b$ 有且只有一个根.

证明：(反证) 假设方程有两个不同根 x, y ，则 $ax = b$ ， $ay = b$ ，两式作差可得 $a(x - y) = 0$. 由于 $a \neq 0$ ，则 $x - y = 0$ ，这与“ $x \neq y$ ”矛盾. $\square$

注：在证明满足某个性质的值的唯一性时，都是设若有两个满足该性质的值，则这两个值相等. 有些命题和不等式，从正面证如果不好证，可以考虑反证法. 凡是含有“至少”、“唯一”或含有其他否定词的命题，可以考虑用反证法，即“正难则反”.

例 1.3.3 对于函数 $g(x)$ ，如果存在 x_0 使得 $g(x_0) = x_0$ ，称 x_0 为 $g(x)$ 的不动点.

设 $f(x)$ 定义在 $\mathbb{R}$ 上，若 $f[f(x)]$ 存在唯一的不动点，则 $f(x)$ 也存在唯一的不动点.

证明：

1. **唯一性**：(反证) 假设 $f(x)$ 有两个不动点 x_1, x_2 ($x_1 \neq x_2$)，则 $f(x_1) = x_1$ ， $f(x_2) = x_2$ ，于是 $f(f(x_1)) = f(x_1) = x_1$ ， $f(f(x_2)) = f(x_2) = x_2$ ，于是 x_1, x_2 是 $f[f(x)]$ 的两个不同不动点，矛盾.
2. **存在性**：自证.

$\square$

例 设有长度为 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 的五条线段，其中任何三条线段都组成一个三角形，共组成了 10 个三角形. 试证这些三角形中必有一个锐角三角形.

证明：不妨设 $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq a_5$ ，又假设这五条线段中任三条都不能构成锐角三角形，则必有

$$a_3^2 \geq a_1^2 + a_2^2, a_4^2 \geq a_2^2 + a_3^2, a_5^2 \geq a_3^2 + a_4^2.$$

于是

$$a_5^2 \geq a_3^2 + a_4^2 \geq a_1^2 + a_2^2 + a_2^2 + a_3^2 \geq 2a_1^2 + 3a_2^2 > (a_1 + a_2)^2.$$

这时有 $a_5 > a_1 + a_2$ ，从而 a_1, a_2, a_5 不能构成三角形，矛盾. 因此必有一个锐角三角形. $\square$

注：直观上看， a_1, a_2, a_5 这三条边“最不可能”构成三角形，故想办法证明 $a_5 > a_1 + a_2$ 就行了.

数学归纳法

数学归纳法是数学的一种基本证明方法，它在表现形式上各种各样，但是表达格式是唯一的. 数学归纳法的逻辑基础的 Peano 公理中的归纳公理：

归纳公理：设 $S \subseteq \mathbb{N}^*$ ，满足下面两个条件：(1) $1 \in S$ ；(2) 如果 $n \in S$ ，则 $n+1 \in S$. 则 $S = \mathbb{N}^*$.

第一数学归纳法 设 p_n 是关于正整数 n 的命题. 如果

1. p_1 是真命题;
2. p_n 是真命题可以推出 p_{n+1} 也是真命题.

则 p_n 对任意正整数 n 都成立.

证明: 设 $S = \{n \mid n \in \mathbb{N}^*, p_n \text{ 是真命题}\}$, 则 $S \subseteq \mathbb{N}^*$. 因此由条件, $1 \in S$; 如果 $n \in S$, 即 p_n 成立, 则 p_{n+1} 成立, 则 $n+1 \in S$. 因此根据归纳公理, $S = \mathbb{N}^*$, 即对任意 $n \in \mathbb{N}^*$, 命题 p_n 都成立. $\square$

注: 第一数学归纳法显然可以反推出归纳公理, 所以一般的教材中不会给出数学归纳法原理的证明.

类似我们还有**第二数学归纳法**:

第二数学归纳法 设 p_n 是关于正整数 n 的命题. 如果

1. p_1 是真命题;
2. 对任意正整数 $n > 1$, 如果对所有正整数 $k < n$, p_k 都是真命题, 那么可以推出 p_n 也是真命题,

则 p_n 对任意正整数 n 都成立.

事实上, 数学归纳法不一定要从 $n = 1$ 开始, 也有可能从 $n = 2, 3$ 开始归纳. 这是因为

命题 设 $S \subseteq \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{N}^*$, 满足下面两个条件: (1) $k \in S$; (2) 如果 $n \in S$, 则 $n+1 \in S$. 则 $S \in \mathbb{N}^* \setminus \{1, 2, \dots, k-1\}$.

证明: 考虑集合 $S' = \{n \mid n+k-1 \in S\}$, 则 $1 \in S'$, 且如果 $n \in S'$, 则 $n+k-1 \in S$, 由条件 $n+k \in S$, 则 $n+1 \in S'$, 因此 S' 也满足归纳公理, 于是 $S' = \mathbb{N}^*$. 而注意到 S 与 S' 可以建立一一映射: $n \mapsto n-k+1$, 因此 $S = \mathbb{N}^* \setminus \{1, 2, \dots, k-1\}$. $\square$

例 证明: $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

证明: 我们把这个关于 n 的等式记为命题 p_n .

1. 当 $n = 1$ 时, 此等式即为 $1^2 = 1$, 显然 p_1 成立.
2. 假如对于 $n > 1$ 有

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

那么

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \\ &= \frac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]}{6}. \end{aligned}$$

所以命题 p_n 可以推出命题 p_{n+1} , 根据第一数学归纳法, 原命题对任意正整数 n 都成立. $\square$

例, Bernoulli 不等式 设 m 是正整数, 则当 $x > -1$ 时, $(1+x)^m \geq 1+mx$.

证明: 当 $m = 1$ 时不等式显然成立. 下面用数学归纳法证明: 当 $m \geq 2$, $x > -1$ 时, $(1+x)^m \geq 1+mx$.

1. 当 $m = 2$ 时, 左边 $= 1 + 2x + x^2 \geq 1 + 2x =$ 右边.

2. 假设当 $m = k$ 时不等式成立, 当 $m = k + 1$ 时,

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x) \geq (1+kx)(1+x) = 1 + (k+1)x + kx^2 \geq 1 + (k+1)x,$$

所以 $m = k + 1$ 的情况也成立. 因此原不等式成立. $\square$

例 设 $0 < a < 1$, 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1 + a$, $a_{n+1} = a + \frac{1}{a_n}$. 求证: 对任意的 $n \in \mathbb{N}^*$, 都有 $1 < a_n \leq 1 + a$.

证明: 用数学归纳法证明.

1. 当 $n = 1$ 时, $1 < a_1 = 1 + a$, 显然成立;

2. 假设当 $n = k$ 时, $1 < a_k \leq 1 + a$, 则当 $n = k + 1$ 时, 由归纳假设可知

$$1 + a > a_{k+1} = \frac{1}{a_k} + a \geq \frac{1}{1+a} + a = \frac{1+a+a^2}{1+a} > \frac{1+a}{1+a} = 1,$$

因此欲证命题对任意正整数 n 都成立. $\square$



4.5 习题

4.5.1 定心丸——高考 90% 是这种难度

习题 1, 2024 新一卷 设集合 $A = \{x \mid -5 < x^3 < 5\}$, $B = \{-3, -1, 0, 2, 3\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $\{-1, 0\}$
- B. $\{2, 3\}$
- C. $\{-3, -1, 0\}$
- D. $\{-1, 0, 2\}$

注:

1. 不知道有多少人被当年这道题(试卷第一题)搞心态了, 出题人真的想让你估计 3 次根号吗? 下次出 5 次根号, 甚至 100 次根号呢?
2. 感兴趣的读者不妨学一学如何“手开根号”?

习题 2, 2023 甲卷 设集合 $A = \{x \mid x = 3k + 1, k \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{x \mid x = 3k + 2, k \in \mathbb{Z}\}$, U 为整数集, 则 $\complement_U(A \cup B) =$ ()

- A. $\{x \mid x = 3k, k \in \mathbb{Z}\}$
- B. $\{x \mid x = 3k - 1, k \in \mathbb{Z}\}$
- C. $\{x \mid x = 3k - 2, k \in \mathbb{Z}\}$
- D. $\emptyset$

注:

1. 目前不会做不要紧, 去复习 2.3 节吧。
2. 在考场上如果不会做的话怎么办? 蒙一个吗? 请你牢记以下两件事: 有一个数学思想叫特殊化思想; 穷举法并不丢人, 甚至可以在某些压轴题中出奇制胜!

虽说高考 90% 的集合题目都是以解各种不等式(一元二次不等式, 绝对值不等式, 分式不等式, 高次不等式, 各种函数的不等式)为载体, 难度就是以上两道题目的难度(解不等式是太基础的基本功了, 不熟练的读者可以去看看书或者找些视频补一下基础), 但是我们在备考的过程中却不得不准备一些额外的经典题型, 它们几乎都是笔者在高一同步学习时经常遇到的题目。坐好扶稳, 我们进入下一个小节!

4.5.2 一些额外的经典题型——高一常考的, 有印象吗?

细心的读者或许会发现, 上面的第 2 题貌似有些数论的影子。没错, 它们就是整除和同余! 建议大家先回顾一遍整除和同余的定义与基本性质, 接着你会发现在后面的第 3 题中提到的“类”就是“同余类”, 好好体会一下整除和同余的强大之处吧, 进而引出我们的“大招”——大小倍数法! 但是别盲目追求所谓的“大招”, 学会原理(适用条件和推导过程)才是王道! 万一高考给你出个反套路的呢?

习题 3 在整数集 $\mathbb{Z}$ 中, 被 5 除所得余数为 k 的所有整数组成一个“类”, 记为 $[k]$, 即 $[k] = \{5n+k \mid n \in \mathbb{Z}\}$, $k=0,1,2,3,4$, 则下面选项正确的为 ()

- A. $2025 \in [3]$
- B. $-2 \in [2]$
- C. $\mathbb{Z} = [0] \cup [1] \cup [2] \cup [3] \cup [4]$
- D. 整数 a, b 属于同一“类”的充分不必要条件是“ $a-b \in [0]$ ”

4.5.2.1 大小倍数法

大倍数是小倍数的子集, 有真子集就选真子集!

习题 4 设集合 $M = \left\{x \mid x = \frac{k}{2} + \frac{1}{4}, k \in \mathbb{Z}\right\}$, $N = \left\{x \mid x = \frac{k}{4} + \frac{1}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$, 则 ()

- A. $M = N$
- B. $M \subsetneq N$
- C. $M \supsetneq N$
- D. $M \cap N = \emptyset$

习题 5 集合 $M = \{x \mid x = 4k+2, k \in \mathbb{Z}\}$, $N = \{x \mid x = 2k, k \in \mathbb{Z}\}$, $P = \{x \mid x = 4k-2, k \in \mathbb{Z}\}$, 则 M, N, P 的关系为 ()

- A. $M = P \subseteq N$
- B. $N = P \subseteq M$
- C. $M = N \subseteq P$
- D. $M = P = N$

习题 6 设集合 $M = \{x \mid x = 2k-1, k \in \mathbb{Z}\}$, $N = \{x \mid x = 4k+1, k \in \mathbb{Z}\}$, 则 ()

- A. $M = N$
- B. $M \subseteq N$
- C. $N \subseteq M$
- D. $M \cap N = \emptyset$

4.5.2.2 德摩根律/容斥原理

习题 7, 2019 全国三卷 《西游记》《三国演义》《水浒传》和《红楼梦》是中国古典文学瑰宝,并称为中国古典小说四大名著。某中学为了解本校学生阅读四大名著的情况,随机调查了 100 位学生,其中阅读过《西游记》或《红楼梦》的学生共有 90 位,阅读过《红楼梦》的学生共有 80 位,阅读过《西游记》且阅读过《红楼梦》的学生共有 60 位,则该校阅读过《西游记》的学生人数与该校学生总数比值的估计值为 ()

- A. 0.5
- B. 0.6
- C. 0.7
- D. 0.8

习题 8, 2020 新课改卷 某中学的学生积极参加体育锻炼,其中 96% 的学生喜欢足球或游泳,60% 的学生喜欢足球,82% 的学生喜欢游泳,则该中学既喜欢足球又喜欢游泳的学生占该校学生总数的比例是 ()

- A. 62%
- B. 56%
- C. 46%
- D. 42%

习题 9, 2009 湖南卷 某班全班同学都有喜爱的运动,其中 15 人喜爱篮球运动,10 人喜爱乒乓球运动,8 人对这两项运动都喜爱,则班上总人数是 。

习题 10, 新人教 A 版必修一 P35 学校举办运动会时,高一(1)班共有 28 名同学参加比赛,有 15 人参加游泳比赛,有 8 人参加田径比赛,有 14 人参加球类比赛,同时参加游泳比赛和田径比赛的有 3 人,同时参加游泳比赛和球类比赛的有 3 人,没有人同时参加三项比赛。同时参加田径和球类比赛的有多少人?只参加游泳一项比赛的有多少人?

习题 11, 2019 浙江模拟 设 U 为全集,对于集合 M, N , 下列集合之间关系不正确的是 ()

- A. $M \cap N \subseteq M \cup N$
- B. $(\complement_U M) \cup (\complement_U N) = \complement_U (M \cap N)$
- C. $(\complement_U M) \cap (\complement_U N) = \complement_U (M \cup N)$
- D. $(\complement_U M) \cap (\complement_U N) = \complement_U (M \cap N)$

习题 12 建华中学共有 1600 名学生,其中喜欢乒乓球的有 1180 人,喜欢羽毛球的有 1360 人,喜欢篮球的有 1250 人,喜欢足球的有 1040 人,问以上四项球类运动都喜欢的至少有几?

- A. 20 人
- B. 30 人
- C. 40 人
- D. 50 人

习题 13 某网店统计了连续三天售出商品的种类情况：第一天售出 19 种商品，第二天售出 13 种商品，第三天售出 18 种商品；前两天都售出的商品有 3 种，后两天都售出的商品有 4 种，则该网店：

1. 第一天售出但第二天未售出的商品有 ___ 种；
2. 这三天售出的商品最少有 ___ 种。

4.5.2.3 连子集问题

习题 14 满足 $\{a\} \subseteq P \subseteq \{a, b, c\}$ 的集合 P 的个数是 ()

- A. 2
- B. 3
- C. 4
- D. 5

习题 15 满足条件 $\{a\} \subsetneq M \subseteq \{a, b, c, d\}$ 的所有不同集合 M 的个数为 ()

- A. 6
- B. 7
- C. 8
- D. 9

习题 16 满足条件 $\{1, 2, 3\} \subsetneq M \subsetneq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 的集合 M 的个数是 ()

- A. 8
- B. 7
- C. 6
- D. 5

4.5.3 一些必备的意识 or 数学思想

4.5.3.1 列举法/数形结合

习题 17, 2023 广东模拟 设集合 $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 16\}$, $B = \{(x, y) \mid x + y = 2\}$, 则 ()

- A. 集合 $A \cup B$ 的非空子集有 4 个
- B. 集合 $A \cup B$ 的非空子集有 3 个
- C. 集合 $A \cap B$ 的非空子集有 4 个
- D. 集合 $A \cap B$ 的非空子集有 3 个

4.5.3.2 你真的严谨吗?——大胆猜想, 小心论证, 用反证法推矛盾!

习题 18, 新人教 A 版必修一 P14 已知全集 $U = A \cup B = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 \leq x \leq 10\}$, $A \cap (\complement_U B) = \{1, 3, 5, 7\}$, 试求集合 B 。

习题 19 已知 M, N 为全集 U 的非空真子集, 且 M 与 N 不相等, 若 $(\complement_U M) \cap N = \emptyset$, 试判断集合 M 和 N 的关系, 并求出 $M \cup N$ 。

4.5.3.3 没啥难的, 按定义证明——比着葫芦画瓢 (其实就是 $\mathbb{F}$ 吧 $\mathbb{F}$)

习题 20, 多选 定义全集 U 的子集 A 的特征函数 $f_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \in \complement_U A \end{cases}$, 这里 $\complement_U A$ 表示 A 在全集 U 中的补集, 那么对于集合 $A, B \subseteq U$, 下列所有正确说法是 ()

- A. $A \subseteq B \implies f_A(x) \leq f_B(x)$
- B. $f_{\complement_U A} = 1 - f_A(x)$
- C. $f_{A \cup B}(x) = f_A(x) + f_B(x)$
- D. $f_{A \cap B}(x) = f_A(x) \cdot f_B(x)$

4.5.3.4 分类讨论——找好分类依据, 逻辑清晰即可!

习题 21 设集合 $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, $B = \{a_1^2, a_2^2, a_3^2, a_4^2, a_5^2\}$, 其中 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 是五个不同的正整数, 且 $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$, 已知 $A \cap B = \{a_1, a_4\}$, $a_1 + a_4 = 10$, $A \cup B$ 中所有元素之和是 246, 请写出所有满足条件的集合 A : 。

4.5.3.5 构造思想——初探映射, 两两搭配

习题 22 对于一个由整数组成的集合 A , A 中所有元素之和称为 A 的“小和数”, A 的所有非空子集的“小和数”之和称为 A 的“大和数”。已知集合 $B = \{-7, -3, -1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 13\}$, 则 B 的“小和数”为 , B 的“大和数”为 。

习题 23 设 $\mathbb{N}_m^* = \{1, 2, \dots, m\}$ 表示不超过 m ($m \in \mathbb{N}^*$) 的正整数集合, A_k 表示 k 个元素的有限集, $S(A)$ 表示集合 A 中所有元素的和, 集合 $T_{m,k} = \{S(A_k) \mid A_k \subseteq \mathbb{N}_m^*\}$, 则 $T_{3,2} = \underline{\hspace{1cm}}$; 若 $S(T_{m,3}) \leq 2024$, 则 m 的最大值为 $\underline{\hspace{1cm}}$ 。

4.5.4 关于数理逻辑的一些题目

4.5.4.1 分清谁是先来的, 谁是后到的——别循环论证了! 再者, 谁是充分性, 谁是必要性?

习题 24 设 a, b, c 分别是 $\triangle ABC$ 的三条边, 且 $a \leq b \leq c$ 。我们知道, 如果 $\triangle ABC$ 为直角三角形, 那么 $a^2 + b^2 = c^2$ (勾股定理)。反过来, 如果 $a^2 + b^2 = c^2$, 那么 $\triangle ABC$ 为直角三角形 (勾股定理的逆定理)。由此可知, $\triangle ABC$ 为直角三角形的充要条件是 $a^2 + b^2 = c^2$ 。请利用边长 a, b, c 分别给出 $\triangle ABC$ 为锐角三角形和钝角三角形的一个充要条件, 并证明。

4.5.4.2 你真的敢选吗?——严谨一些吧!

习题 25 已知函数 $f(x) = \cos(x + \varphi)$, 则 “ $f(1) = -f(-1)$ ” 是 “ $f(x)$ 为奇函数” 的 ()

- A. 充分不必要条件
- B. 必要不充分条件
- C. 充要条件
- D. 既不充分也不必要条件

4.5.4.3 一些围绕着等比数列单调性的逻辑题目

习题 26, 2014 北京卷 设 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列, 则 “ $q > 1$ ” 是 “ $\{a_n\}$ 为递增数列” 的 () 条件

- A. 充分不必要
- B. 必要不充分
- C. 充分必要
- D. 既不充分也不必要

习题 27, 2009 山东卷 设 $\{a_n\}$ 是等比数列, 则 “ $a_1 < a_2 < a_3$ ” 是 “数列 $\{a_n\}$ 是递增数列” 的 ()

- A. 充分不必要
- B. 必要不充分
- C. 充分必要
- D. 既不充分也不必要

习题 28, 2021 甲卷 等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 前 n 项和为 S_n , 设甲: $q > 0$, 乙: $\{S_n\}$ 是递增数列, 则 ()

- A. 甲是乙的充分条件但不是必要条件
- B. 甲是乙的必要条件但不是充分条件
- C. 甲是乙的充要条件
- D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

4.5.5 直接证明, 反证法, 数学归纳法在高考数学, 强基数学, 竞赛数学中的应用

4.5.5.1 直接证明

习题 29, 2007 湖北卷 已知 p 是 r 的充分条件而不是必要条件, q 是 r 的充分条件, s 是 r 的必要条件, q 是 s 的必要条件, 现有下列命题, 正确命题的序号为 ____。

- ① s 是 q 的充要条件;
- ② p 是 q 的充分条件而不是必要条件;
- ③ r 是 q 的必要条件而不是充分条件;
- ④ $\neg p$ 是 $\neg s$ 的必要条件而不是充分条件;
- ⑤ r 是 s 的充分条件而不是必要条件.

习题 30 证明积化和差公式:

1. $2 \cos \theta \cos \varphi = \cos(\theta - \varphi) + \cos(\theta + \varphi)$;
2. $2 \sin \theta \sin \varphi = \cos(\theta - \varphi) - \cos(\theta + \varphi)$;
3. $2 \sin \theta \cos \varphi = \sin(\theta + \varphi) + \sin(\theta - \varphi)$;
4. $2 \cos \theta \sin \varphi = \sin(\theta + \varphi) - \sin(\theta - \varphi)$.

习题 31 若 $\triangle ABC$ 的三边 a, b, c 的倒数成等差数列, 证明 $B < \frac{\pi}{2}$.

习题 32, 2016 浙江卷 已知函数 $f(x) = x^2 + bx$, 若 $b \leq 0$, 证明函数 $f(f(x))$ 的最小值与 $f(x)$ 的最小值相等。

习题 33 设 $f(x)$ 定义在 $(0, +\infty)$ 上, $x_1 > 0, x_2 > 0$. 证明: 若 $\frac{f(x)}{x}$ 单调下降, 则 $f(x_1 + x_2) \leq f(x_1) + f(x_2)$;

习题 34, 2014 辽宁卷 已知定义在 $[0, 1]$ 上的函数 $f(x)$ 满足: $f(0) = f(1) = 0$; 对任意 $x, y \in [0, 1]$, 且 $x \neq y$, 有 $|f(x) - f(y)| < \frac{1}{2}|x - y|$. 证明: 对任意 $x, y \in [0, 1]$, 都有 $|f(x) - f(y)| < \frac{1}{4}$.

习题 35, 2014 天津卷 已知 q 和 n 都是给定的大于 1 的自然数, 设集合 $M = \{0, 1, 2, \dots, q-1\}$, 集合 $A = \{x \mid x = x_1 + x_2q + \dots + x_nq^{n-1}, x_i \in M, i = 1, 2, \dots, n\}$. 设 $s, t \in A$, $s = a_1 + a_2q + \dots + a_nq^{n-1}$, $t = b_1 + b_2q + \dots + b_nq^{n-1}$, 其中 $a_i, b_i \in M, i = 1, 2, \dots, n$. 证明: 若 $a_n < b_n$, 则 $s < t$.

习题 36, 2016 上海卷 设 $f(x), g(x), h(x)$ 是定义域为 $\mathbb{R}$ 的三个函数. 对于下面两个命题, 判断命题正误. 如果命题正确, 请给出证明; 如果命题错误, 请举出反例.

1. 若 $f(x) + g(x), f(x) + h(x), g(x) + h(x)$ 均是增函数, 则 $f(x), g(x), h(x)$ 均是增函数;
2. 若 $f(x) + g(x), f(x) + h(x), g(x) + h(x)$ 均是以 T 为周期的函数, 则 $f(x), g(x), h(x)$ 均是以 T 为周期的函数.

习题 37, 2015 上海卷 记方程 $: x^2 + a_1x + 1 = 0$, 方程 $: x^2 + a_2x + 2 = 0$, 方程 $: x^2 + a_3x + 4 = 0$, 其中 a_1, a_2, a_3 是正实数, a_1, a_2, a_3 成等比数列. 若方程 有实根, 且 无实根, 证明: 方程 无实根.

习题 38, 2017 北京卷 设 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 是等差数列, $c_n = \max\{b_1 - a_1n, b_2 - a_2n, \dots, b_n - a_nn\} (n \in \mathbb{N}^*)$. 设 $a_n = n, b_n = 2n - 1$, 证明 $\{c_n\}$ 是等差数列.

习题 39, 2015 上海卷 对于定义域为 $\mathbb{R}$ 的函数 $g(x)$, 若存在正常数 T , 使得 $\cos g(x)$ 是以 T 为周期的函数, 则称 $g(x)$ 为余弦周期函数, 且称 T 为其余弦周期. 已知 $f(x)$ 是以 T 为余弦周期的余弦周期函数, 其值域为 $\mathbb{R}$, $f(0) = 0, f(T) = 4\pi$.

1. 设 $a < b$. 证明对任意 $c \in [f(a), f(b)]$, 存在 $x_0 \in [a, b]$ 使得 $f(x_0) = c$;
2. 证明: “ u_0 为方程 $\cos f(x) = 1$ 在 $[0, T]$ 上的解” 的充要条件是 “ $u_0 + T$ 是方程 $\cos f(x) = 1$ 在 $[T, 2T]$ 上的解”, 并证明对任意 $x \in [0, T]$ 都有 $f(x + T) = f(x) + f(T)$.

4.5.5.2 反证法

习题 40, 2014 山东卷 用反证法证明命题 “设 a, b 为实数, 则方程 $x^3 + ax + b = 0$ 至少有一个实根” 时, 要做的假设是 ()

- A. 方程 $x^3 + ax + b = 0$ 没有实根
- B. 方程 $x^3 + ax + b = 0$ 至多有一个实根
- C. 方程 $x^3 + ax + b = 0$ 至多有两个实根
- D. 方程 $x^3 + ax + b = 0$ 恰好有两个实根

习题 41, 2006 陕西卷 已知函数 $f(x) = ax^2 + 2ax + 4 (a > 0)$, x_1, x_2 满足 $x_1 < x_2$. 某同学要证明命题 “若 $x_1 + x_2 = 0$, 则 $f(x_1) < f(x_2)$ ”, 他的证明如下:

若 $f(x_1) < f(x_2)$, 则 $ax_1^2 + 2ax_1 + 4 < ax_2^2 + 2ax_2 + 4$, 即

$$a(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) + 2a(x_1 - x_2) < 0$$

合并同类项, 得

$$(x_1 + x_2 + 2)(x_1 - x_2) < 0 \quad (*)$$

由于 $x_1 + x_2 = 0$, 则 $(x_1 + x_2 + 2)(x_1 - x_2) = 2(x_1 - x_2)$, 所以 $(*)$ 式可以化简为 $x_1 < x_2$, 符合条件, 因此欲证命题成立。

但这个证明是错的, 请指出错误的原因, 并给出正确的证明。

习题 42 设 $f(x)$ 定义在 $\mathbb{R}$ 上, 若 $f(f(x))$ 有且仅有两个不动点 $a, b (a \neq b)$, 那么只存在两种情况:

1. a, b 都是 f 的不动点;
2. $f(a) = b, f(b) = a$ 。

习题 43 已知函数 $f(x) = \sin x + \sin(\pi x)$ 。

1. 证明: 对任意 $x \in \mathbb{R}$, 都有 $f(x) < 2$;
2. 判断 $f(x)$ 是不是周期函数, 并说明理由。

习题 44, 2015 湖北卷 设 $x \in \mathbb{R}$, $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数。若存在实数 t , 使得 $[t] = 1, [t^2] = 2, \dots, [t^n] = n$ 同时成立, 证明: 正整数 n 的最大值是 4。

习题 45, 2015 湖南卷 设 $a > 0, b > 0$ 且 $a + b = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 。证明: $a^2 + a < 2$ 与 $b^2 + b < 2$ 不可能同时成立。

习题 46 已知等差数列 a, b, c 中的三个数都是正数, 且公差不为 0, 求证它们的倒数组成的数列 $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ 不可能成等差数列。

习题 47 设 $b_n = \ln n$ 。证明: 不存在正整数 $k \geq 2$, 使得 b_k, b_{k+1}, b_{k+2} 成等比数列。

习题 48 设 $n \geq 15, n$ 是正整数, A, B 是 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的真子集, $A \cap B = \emptyset$, 且 $\{1, 2, \dots, n\} = A \cup B$ 。证明: A 或者 B 中必有两个不同的数和为完全平方数。

习题 49 已知函数 $g(x) = \ln x - e^{-x}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上有唯一的零点 x_0 。是否存在函数 $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 满足 $e^x f(x) + \frac{\ln x}{f(x)} = 1$?

4.5.5.3 数学归纳法

习题 50 设 $x \in \mathbb{R}$, 证明对任意 $n \in \mathbb{N}^*$, 有 $|\sin(nx)| \leq n|\sin x|$ 。

习题 51 讨论数列 $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 的单调性。

习题 52 设 $f(n) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ 。证明: 当 n 是正整数时, $f(2^n) \geq \frac{n}{2} + 1$ 。

习题 53 证明: $\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{3k-2}\right) > \sqrt[3]{3n+1}$ 。

习题 54 设 $a > 0$, 证明对任意正整数 n , 都有

$$\frac{1 + a^2 + \cdots + a^{2n}}{a + a^3 + \cdots + a^{2n-1}} \geq \frac{n+1}{n}.$$

习题 55 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$, $n \geq 1$. 证明: $\sqrt{2} \leq a_n < 2$.

习题 56 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{1 + a_n}$.

1. 证明: $\frac{1}{2} \leq a_n \leq 1$;

2. 证明: $\{a_{2k-1}\}$ 单调递减, $\{a_{2k}\}$ 单调递增。

习题 57 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{a_n + 3}{a_n + 1}$, 证明

$$|a_n - \sqrt{3}| \leq \frac{(\sqrt{3} - 1)^n}{2^{n-1}}.$$

4.5.6 来看看模拟卷的顶峰是咋考的

习题 58 已知 $a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 8, a_4 = 16$, 若存在 $b_1, b_2, b_3, b_4 \in \mathbb{R}$, 满足 $\{b_i + b_j \mid 1 \leq i < j \leq 4\} = \{a_i + a_j \mid 1 \leq i < j \leq 4\}$ 成立, 则有序数对 (b_1, b_2, b_3, b_4) 有 ___ 对。

习题 59 对于非空集合 P , 定义函数 $f_P(x) = \begin{cases} -1, & x \notin P \\ 1, & x \in P \end{cases}$, 已知集合 $A = \{x \mid 0 < x < 1\}$, $B = \{x \mid t < x < 2t\}$, 若存在 $x \in \mathbb{R}$, 使得 $f_A(x) + f_B(x) > 0$, 则实数 t 的取值范围为 ___。

习题 60 指示函数是一个重要的数学函数, 通常用来表示某个条件的成立情况。已知 U 为全集且元素个数有限, 对于 U 的任意一个子集 S , 定义集合 S 的指示函数 $1_S(x)$, $1_S(x) = \begin{cases} 1, & x \in S \\ 0, & x \in \complement_U S \end{cases}$ 。若 $A, B, C \subseteq U$, 则注: $\sum_{x \in M} f(x)$ 表示 M 中所有元素 x 所对应的函数值 $f(x)$ 之和 (其中 M 是 $f(x)$ 定义域的子集)。

A. $\sum_{x \in A} 1_A(x) < \sum_{x \in U} 1_A(x)$

B. $1_{A \cap B}(x) \leq 1_A(x) \leq 1_{A \cup B}(x)$

C. $\sum_{x \in U} 1_{A \cup B}(x) = \sum_{x \in U} (1_A(x) + 1_B(x) - 1_A(x)1_B(x))$

D. $\sum_{x \in U} (1 - 1_A(x))(1 - 1_B(x))(1 - 1_C(x)) = \sum_{x \in U} 1_U(x) - \sum_{x \in U} 1_{A \cup B \cup C}(x)$

习题 61 已知 U 为全集, 集合 A, B, C, D 满足: A, B, C 为 U 的非空子集, 且 $A \cup B \cup C = U$, $C \cup D = C$, $(\complement_U A)(A \cap B) = D$. 对所有满足上述条件的情形, 下列说法一定错误的有

- A. $C \cap D \neq \emptyset$
- B. $B \cup C = U$
- C. $(A \cup B) \cap C = \emptyset$
- D. $\complement_U(A \cup B)$ 不包含于 C

习题 62 称集合 X 为“ Q 集合”, 如果 X 满足如下三个条件:

- ① X 中有 20 个元素;
- ② X 中的每个元素是包含于 $[0, 1]$ 的闭区间;
- ③ 对任意实数 $r \in [0, 1]$, X 中包含 r 的元素个数不超过 10。

对于“ Q 集合” A, B , $I \in A$, $J \in B$, 满足 $I \cap J \neq \emptyset$ 的区间对 (I, J) 的个数的最大值为 ____。

习题 63 给定 $n \in \mathbb{N}_+$, 若集合 $P \subseteq \{1, 2, 3, \dots, n\}$, 且存在 $a, b, c, d \in P$, 满足 $a < b \leq c < d$, $b - a = d - c$, 则称 P 为“广义等差集合”。记 P 的元素个数为 $|P|$, 则

- A. $\{1, 2, 3\}$ 是“广义等差集合”
- B. $\{1, 3, 4, 6\}$ 是“广义等差集合”
- C. 若 P 不是“广义等差集合”, 当 $n = 8$ 时, $|P|$ 的最大值为 4
- D. 若 P 不是“广义等差集合”, 若 $|P|$ 的最大值为 4, 则 n 可以是 13

4.5.7 在 2024 和 2025 新一卷压轴 19 题中的应用

习题 64, 2024 新一卷 设 m 为正整数, 数列 $a_1, a_2, \dots, a_{4m+2}$ 是公差不为 0 的等差数列, 若从中删去两项 a_i 和 a_j ($i < j$) 后剩余的 $4m$ 项可被平均分为 m 组, 且每组的 4 个数都能构成等差数列, 则称数列 $a_1, a_2, \dots, a_{4m+2}$ 是 (i, j) -可分数列。

1. 写出所有的 (i, j) , $1 \leq i < j \leq 6$, 使得数列 $a_1, a_2, \dots, a_8$ 是 (i, j) -可分数列;
2. 当 $m \geq 3$ 时, 证明: 数列 $a_1, a_2, \dots, a_{4m+2}$ 是 $(2, 13)$ -可分数列;
3. 从 $1, 2, \dots, 4m+2$ 中一次任取两个数 i 和 j ($i < j$), 记数列 $a_1, a_2, \dots, a_{4m+2}$ 是 (i, j) -可分数列的概率为 p_m , 证明: $p_m > \frac{1}{8}$ 。

注: 事实上, 此题改编自 2022 北京卷 21 题。曾几何时, 我在做家教时给出了这些题目的解答:

(1). $(i, j) = (1, 2), (5, 6), (1, 6)$. ----- (4分)

(2). 先考虑 $m=3$ 时, 共有 12 项: $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}$.
平均分成 3 组, 则公差 $d' = 3d$, 成等差数列。

即: $(a_1, a_4, a_7, a_{10}), (a_2, a_6, a_9, a_{12}), (a_3, a_5, a_{11}, a_{12})$ 成等差数列. $d' = 3d$. ----- (6分)

当 $m \geq 4$ 时, 增加 $3 \cdot 4(m-3)$ 项, 让上面的连续 4 项成一组, 依然成等差数列. $d' = d$. ----- (8分)

(3). 设可分数列的个数为 b_m , 则 $p_m = \frac{b_m}{C_{4m+2}^2}$. 由 (1) 知 $b_1 = 3$. ----- (9分)

当 $m=2$ 时, 共有 10 项: $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}$. 可分的情况为:

连续 4 项成等差数列. a. $j-i=1, (1, 2), (5, 6), (9, 10)$ $d'=d$

b. $j-i=5, (1, 6), (5, 10), d'=d$

c. $j-i=9, (1, 10), d'=d$.

此时, $j-i=4k+1$, 其中 $i=4k+1, j=4k+2$. ----- (10分)

猜想 $i=4k+2, j=4k+1$ 的情况也成立: d. $j-i=7, (2, 9), d'=2d$. 此时 $b_2 = 7$. ----- (11分)

当 m 变为 $m+1$ 时, 数列 $a_1, a_2, \dots, a_{4m+2}$ 变为 $a_1, a_2, \dots, a_{4m+2}, a_{4m+3}, a_{4m+4}, a_{4m+5}, a_{4m+6}$.

增加的可分数列: a. $j=4m+6$ 时, $(1, 4m+6), (5, 4m+6), (9, 4m+6), \dots, (4m+5, 4m+6)$. 共 $m+2$ 项. ----- (12分)

b. $j=4m+5$ 时, $(2, 4m+5), (6, 4m+5), (10, 4m+5), \dots, (4m-2, 4m+5)$. 共 m 项. ----- (13分)

$\therefore b_{m+1} - b_m = 2m+2$. ----- (14分)

累加可得: $b_m = m^2 + m + 1$. ----- (15分)

则 $p_m = \frac{b_m}{C_{4m+2}^2} = \frac{2(m^2+m+1)}{(4m+2)(4m+1)} = \frac{m^2+m+1}{8m^2+6m+1} = \frac{\frac{1}{8}(8m^2+6m+1) + \frac{1}{4}m + \frac{7}{8}}{8m^2+6m+1} = \frac{1}{8} + \frac{\frac{1}{4}m + \frac{7}{8}}{8m^2+6m+1} > \frac{1}{8}$. ----- (17分)

图 4.1: 我曾给出的 2024 新一卷 19 题的手写解答过程

习题 65, 2022 北京卷 已知 $Q: a_1, a_2, \dots, a_k$ 为有穷整数数列. 给定正整数 m , 若对任意的 $n \in \{1, 2, \dots, m\}$, 在 Q 中存在 $a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_{i+j}$ ($j \geq 0$), 使得 $a_i + a_{i+1} + a_{i+2} + \dots + a_{i+j} = n$, 则称 Q 为 m -连续可表数列.

1. 判断 $Q: 2, 1, 4$ 是否为 5-连续可表数列? 是否为 6-连续可表数列? 说明理由;
2. 若 $Q: a_1, a_2, \dots, a_k$ 为 8-连续可表数列, 求证: k 的最小值为 4;
3. 若 $Q: a_1, a_2, \dots, a_k$ 为 20-连续可表数列, 且 $a_1 + a_2 + \dots + a_k < 20$, 求证: $k \geq 7$.

(1). $Q: 2, 1, 4$ 是 5-连续可表数列. 理由: $1=a_2, 2=a_1, 3=a_1+a_2, 4=a_3, 5=a_2+a_3$.

$Q: 2, 1, 4$ 不是 6-连续可表数列. 理由: $6=a_1+a_3$, 其中 a_1, a_3 不是连续项.

(2). 若 $k \leq 3$. 设 Q 为: a, b, c . 则至多有 $3! = 6$ 个数字. 没有 8! 矛盾!

当 $k=4$ 时. 数列 $Q: 1, 4, 1, 2$. 满足: $a_1=1, a_4=2, a_3+a_4=3, a_2=4, a_1+a_2=5, a_1+a_2+a_3=6$.

$a_2+a_3+a_4=7, a_1+a_2+a_3+a_4=8$. 故 $k_{\min}=4$.

(3). $Q: a_1, a_2, \dots, a_k$. 若 $i=j$, 最多有 k 种. 若 $i \neq j$, 最多有 C_k^2 种 $\Rightarrow$ 所以最多有 $k + C_k^2 = \frac{k(k+1)}{2}$ 种.

若 $k \leq 5$, 则 $a_1, a_2, \dots, a_k$ 至多可表 $\frac{5(5+1)}{2} = 15$ 个数. 矛盾!

从而若 $k < 7$, 则 $k=6$. a, b, c, d, e, f 至多可表 $\frac{6(6+1)}{2} = 21$ 个数. 又 $a+b+c+d+e+f < 20$. 所以其中有负数. 从而 a, b, c, d, e, f 可表 $1 \sim 20$ 及那个负数 (恰 21 个). 所以只有一个负数. 没有 0.

且这个负数在 $a \sim f$ 中绝对值最小, 同时 $a \sim f$ 中没有两数相同. 设该负数为 $-m$ ($m \geq 1$).

则所有数之和 $\geq m+1+m+2+\dots+m+5-m = 4m+15 \leq 19 \Rightarrow m=1$.

$\therefore \{a, b, c, d, e, f\} = \{-1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. 再考虑排序, 排序中不能有和相同. 否则不是 20 个.

$\because 1 = -1+2$ (仅一种方式) $\therefore -1$ 与 2 相邻.

若 -1 不在两端, 则 "2, -1, 3, ..." 形式.

若 $x=6$, 则 $5=6+(-1)$ 有两种方式 (舍). $\therefore x \neq 6$. 同理可得 $x \neq 5, 4, 3$.

故 -1 在一端. 不妨设为 "1, 2, A, B, C, D" 形式.

若 $A=3$, 则 $5=2+3$. 有两种方式 (舍). 同理可得 $A \neq 4$.

$A=5$, 则 $6=-1+2+5$ 有两种方式 (舍). 从而 $A=6$.

由于 $7=-1+2+6$. 由表法唯一知: 3, 4 不相邻. 故只能 ①: 1, 2, 6, 3, 5, 4 或 ②: -1, 2, 6, 4, 5, 3 两种情形.

对 ①: $9=6+3=5+4$. 矛盾. 对 ②: $8=2+6=5+3$. 矛盾! 得上: $k \neq 6 \therefore k \geq 7$.

图 4.2: 我曾给出的 2022 北京卷 21 题的手写解答过程

习题 66, 2025 新一卷 设函数 $f(x) = 5 \cos x - \cos 5x$

1. 求函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 的最大值;
2. 给定 $\theta \in (0, \pi)$ 和 $a \in \mathbb{R}$, 证明: 存在 $y \in [a - \theta, a + \theta]$, 使得 $\cos y \leq \cos \theta$;
3. 设 $b \in \mathbb{R}$, 若存在 $\varphi \in \mathbb{R}$ 使得 $5 \cos x - \cos(5x + \varphi) \leq b$ 对 $x \in \mathbb{R}$ 恒成立, 求 b 的最小值。



C 函数，方程，不等式

5 函数，方程，不等式之间的语言转化

5.1 等式及其性质

本节讲述的内容在数学史上经历了如下发展：

- 古埃及、古巴比伦时期，人们已经开始使用“等量关系”解决实际问题，但此时并没有“等式”的符号，也没有严格的定义，只是通过直观对比判断两个量是否相等。此时的“相等”是直观的、具体的，而非抽象的、公理化的。
- 古希腊时期，欧几里得在《几何原本》中首次提出了“几何中的等量公理”（共 5 条），这是等式公理的雏形，也是数学史上首次对“相等关系”进行规范。局限的是仅适用于几何量，没有推广到数，且仍是直观的几何公理，没有脱离具体对象，尚未形成“抽象集合上的二元关系”，但这是公理化思想在等式中的首次应用，为后续的严谨化奠定了基础。
- 16 世纪，韦达（法国数学家，“代数学之父”）引入了符号化语言，使得“等式”从具体的等量关系走向抽象的代数关系，但此时仍没有对“相等关系”给出严格的公理化定义，人们默认“相等”是直观的，无需定义。这种“不严谨”的代价是引发了第二次数学危机（牛顿、莱布尼茨时期的“无穷小量”，时而为 0，时而不为 0）。
- 19 世纪末-20 世纪初，希尔伯特（德国数学家，“现代公理化之父”）在《几何基础》、《数学基础》中，首次对“相等关系”给出了严格的公理化定义，将“相等关系”定义为集合上的二元关系，与数理逻辑、集合论结合，形成了现代数学中“等式”的定义。

运算中的不变性就是性质，要研究等式的性质，首先要给出四则运算的公理化定义。

四则运算的公理化定义

回顾一下二元运算的定义。

二元运算：设 S 是一个非空集合，若存在映射 $f : S \times S \rightarrow S$ ，即对集合 S 中的任意两个元素 a, b （有序对 (a, b) ），都能通过 f 唯一确定 S 中的一个元素 $f(a, b)$ ，则称 f 为集合 S 上的二元运算。

二元运算是从一个集合和它自己的笛卡尔积到自身的映射，两个输入，一个输出。

为便于书写，二元运算常记为 $\circ$ ，即 $f(a, b) = a \circ b$ 。

定义 (加法和乘法) 设 X 为非空集合， X 上定义了二元运算，即

$$\circ : X \times X \rightarrow X$$

$$(a, b) \mapsto a \circ b$$

(1) 若运算 $\circ$ 满足：

- 封闭性: $\forall a, b \in X, a \circ b \in X$
- 交换律: $\forall a, b \in X, a \circ b = b \circ a$
- 结合律: $\forall a, b, c \in X, a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$
- 单位元: $\exists 0_X \in X$, 对 $\forall a \in X$, 有 $0_X \circ a = a$
- 逆元: $\forall a \in X, \exists a' \in X$, 使得 $a \circ a' = 0_X$

则称 $\circ$ 为 X 上的加法运算, 上述五条性质称为**加法公理**。

注:

- 若 X 为数集, 则把 $\circ$ 记为 $+$;
- 若 $X = \mathbb{Z}/\mathbb{Q}/\mathbb{R}/\mathbb{C}$, 则上述定义中的 $0_X = 0$ (数字 0), $a' = -a$ (a 的相反数), 所以称加法单位元和逆元分别为“零元”和“负元”;
- $\mathbb{N}$ 上没有上述定义的加法运算。

(2) 若运算 $\circ$ 满足:

- 封闭性: $\forall a, b \in X, a \circ b \in X$
- 交换律: $\forall a, b \in X, a \circ b = b \circ a$
- 结合律: $\forall a, b, c \in X, a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$
- 单位元: $\exists 1_X \in X$, 对 $\forall a \in X$, 有 $1_X \circ a = a$
- 逆元: $\forall a \in X$ 且 $a \neq 0_X$, $\exists a' \in X$, 使得 $a \circ a' = 1_X$

则称 $\circ$ 为 X 上的乘法运算, 上述五条性质称为**乘法公理**。

注:

- 若 X 为数集, 则把 $\circ$ 记为 $\times$;
- 若 $X = \mathbb{Q}/\mathbb{R}/\mathbb{C}$, 则上述定义中的 $1_X = 1$ (数字 1), $a' = a^{-1} = \frac{1}{a}$ (a 的倒数);
- $\mathbb{N}$ 和 $\mathbb{Z}$ 上没有上述定义的乘法运算。

问题: 当有两个二元运算时, 哪个叫加法? 哪个叫乘法?

若 X 中两个不同的二元运算 $\circ$ 和 $\triangle$ 均满足加法和乘法运算的定义, 并且 $\triangle$ 对 $\circ$ 满足:

- 左分配律: $a \triangle (b \circ c) = (a \triangle b) \circ (a \triangle c)$
- 右分配律: $(b \circ c) \triangle a = (b \triangle a) \circ (c \triangle a)$

则称 $\circ$ 为加法， $\triangle$ 为乘法。

定义 (减法和除法) a 与 b 的减法运算 “ $a - b$ ” 定义为 “ a 加 b 的逆元的加法运算”，即 $a + (-b)$ ； a 与 b 的除法运算 “ $a \div b$ ” 定义为 “ a 乘 b 的逆元的乘法运算”，即 $a \times b^{-1}$ 。

相等关系

首先给出二元关系的定义。

定义 (二元关系) 设 X 是一个非空集合，若对任意的 $a, b \in X$ ，“ $a \sim b$ ” 都是一个可判定真假的命题，则称 $\sim$ 是集合 X 上的二元关系。

相等关系是特殊的二元关系。

定义 (相等关系) 设 X 是一个非空集合，若 X 上定义了二元关系 $=$ ，且满足以下 3 条性质：

- 自反性：对任意 $a \in X$ ，都有 $a = a$
- 对称性：对任意 $a, b \in X$ ，若 $a = b$ ，则 $b = a$
- 传递性：对任意 $a, b, c \in X$ ，若 $a = b$ 且 $b = c$ ，则 $a = c$

则称上述二元关系 $=$ 是**相等关系**。

抽象代数中，将上述满足三条性质的二元关系称为等价关系。等价关系是对相等关系的推广，三角形的全等、相似关系、整数集上数字的同余关系都是等价关系。等价关系的核心作用是划分等价类，相等关系作为最基本的等价关系，其等价类的划分结果是：每个元素自身构成一个等价类。

若 a 与 b 具有相等关系，则记为 $a = b$ ，读作 “ a 等于 b ”，称这个式子为**等式**。

等式的性质

运算中的不变性就是性质。

根据上述定义以及二元运算的确定性（映射的确定性），不难得到等式具有以下性质：

若 $a = b$ ，则对 $\forall c$ ，都有：

$$a \pm c = b \pm c$$

$$a \times c = b \times c$$

对 $\forall c \neq 0$ ，都有 $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ 。

5.2 作业：加法公理和乘法公理

哈尔滨市第三中学, 29-30 秋季学期, 函数方程不等式之间的语言转化, 作业 7

以下习题取自 rudin 数学分析, 是针对加法公理和乘法公理很好的练习材料。

习题 1 用加法公理证明:

$$x + y = x + z \implies y = z$$

$$x + y = x \implies y = 0$$

$$x + y = 0 \implies y = -x$$

$$-(-x) = x$$

习题 2 用乘法公理证明:

$$x \neq 0, xy = xz \implies y = z$$

$$x \neq 0, xy = x \implies y = 1$$

$$x \neq 0, xy = 1 \implies y = \frac{1}{x}$$

$$x \neq 0 \implies \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$$

习题 3 用加法公理、乘法公理以及乘法对加法的分配律证明:

$$0 \times x = 0$$

$$x \neq 0, y \neq 0 \implies xy \neq 0$$

$$(-x)y = -(xy) = x(-y)$$

$$(-x)(-y) = xy$$

5.3 不等式及其性质

5.4 基本不等式

5.5 一类特殊的映射——函数

5.6 第一组习题: 基本不等式

5.6.1 多次均值, 翻折问题, 求谁留谁和因式分解, 糖水不等式, 柯西不等式, 琴生不等式, 权方和不等式

5.6.2 其他常用的不等式

5.7 第二组习题: 函数的三要素

5.7.1 求定义域的问题：具体函数定义域，抽象函数定义域，已知定义域求参

5.7.2 求函数解析式的方法：待定系数法，换元法，配凑法，方程组法，相关点法与求谁设谁，利用对称性

5.7.3 对应法则的本质：关于函数迭代的问题（类周期问题）

5.7.4 求值域的问题：复合函数值域，分段函数值域，二次函数（换元后是二次函数）值域，齐次分式的分离常数法，几何意义，高次/超越函数的求导求最值

5.7.5 一类易与“已知定义域求参”的“已知值域求参”问题

5.7.6 切比雪夫最佳逼近直线

5.8 第三组习题：函数的性质

5.8.1 单调性：复合函数单调性，分段函数单调性，抽象函数单调性，朗博同构

5.8.2 奇偶性：半区间求解析式，奇常模型，抽象函数奇偶性，单调性与奇偶性的综合问题

5.8.3 对称性与周期性，四大性质的综合问题

6 基本初等函数

6.1 正比例函数与反比例函数的推广——幂函数

6.2 指数与指数函数

6.3 指数的逆运算——对数，对数函数

6.4 反函数及其性质

6.5 角度的推广——任意角与弧度制

6.6 锐角三角函数的推广——任意角的三角函数

6.7 三角函数的公式

6.8 三角函数的图像与性质

6.9 三角恒等变换



7 一类特殊的函数——数列

7.1 用函数研究数列

本节讲述“数列是特殊的函数”，我们可以通过函数来研究数列。

定义 (数列) 设 f 是正整数集 $\mathbb{N}^*$ (或其有限子集 $\{1, 2, \dots, n\}$) 到实数集 $\mathbb{R}$ 的映射, 即

$$f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{或 } f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R})$$

$$k \mapsto f(k) := a_k$$

其像集组成的序列称为数列, 记为 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ 或 $a_1, a_2, a_3, \dots$ 。

数列的“原像”(自变量) $k \in \mathbb{N}^*$ 称为**项数**, 数列的“像”(因变量) a_k 称为数列的**第 k 项**, a_1 称为数列的**首项**, 数列的“解析式”称为数列的**通项公式**。

注:

- 除非特殊说明, 我们通常默认数列有无穷多项, 否则称为有穷数列;
- 数列也可定义为从自然数集 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射, 此时首项为 a_0 , 这种定义在组合数学、分析学中更常见;
- 当 k 不是正整数时, 我们称 a_k 为“**虚拟项**”。

若 $\mathbb{R}$ 上的二元运算 $\circ$ 满足**结合律**, 则映射 f 可诱导出一个与 f 相伴的映射 $\tilde{f}$, 其像集组成的序列构成一个与 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ 相伴的数列 $\{\tilde{a}_n\}_{n=1}^\infty$, 即

$$\tilde{f}: k \mapsto \tilde{f}(k) = f(1) \circ f(2) \circ \dots \circ f(k)$$

注:

- “二元运算 $\circ$ 满足结合律”是必要的, 否则

$$\tilde{f}(k) = f(1) \circ f(2) \circ \dots \circ f(k)$$

结果依赖运算顺序, 无法唯一确定;

- 若上述二元运算为加法, 则称 $\tilde{f}$ 的“解析式”为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和公式, 通常记为 $\{S_n\}_{n=1}^\infty$;
- 若上述二元运算为乘法, 则称 $\tilde{f}$ 的“解析式”为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项积公式, 通常记为 $\{T_n\}_{n=1}^\infty$ 。

数列的性质就是围绕着**通项公式**与**前 n 项和 (积)**展开的。

至此, 我们可以得到以下几个关于数列的性质的“已知”和“未知”, 我们主要研究数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, $\{S_n\}_{n=1}^\infty$, $\{T_n\}_{n=1}^\infty$ 这些未知的性质。

- 定义域: $\mathbb{N}^*$ (或其有限子集 $\{1, 2, \dots, n\}$);
- 值域: $\mathbb{R}$ 的子集, 一般是离散的;
- 单调性: 未知, 但不完全取决于对应函数的单调性 (这或许是离散的“好处”);

- 奇偶性：无定义；
- 对称性：未知；
- 周期性：未知；
- 图像： $\mathbb{R}^2$ 上一些离散的点。

定义（等差数列） 设映射 f 是线性函数（这里允许 $a = 0$ ），即

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$k \mapsto f(k) = ak + b$$

考虑 f 在 $\mathbb{N}^*$ 上的限制 $g = f|_{\mathbb{N}^*}$ ，即

$$g: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(k) = f(k) = ak + b$$

其像集组成的序列称为等差数列。特别地，当 $a = 0$ 且 $b \neq 0$ 时，上述等差数列为**常数列**（我们不考虑 $a = b = 0$ 这种平凡的情况）。

等差数列还具有以下等价定义。

定义（一阶差分） 设数列是映射 $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ ，定义一阶差分映射 $\Delta f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ 为：

$$\Delta f(n) = f(n+1) - f(n)$$

若 $\Delta f = d$ 是常值映射，则称 $\{a_n\}$ 为（一阶）等差数列，常数 d 为公差。

定义（一阶差商） 步长 $\Delta n = 1$ 时，一阶差商为：

$$\frac{\Delta f(n)}{\Delta n} = \frac{f(n+1) - f(n)}{(n+1) - n} = \Delta f(n)$$

因此，等差数列也可定义为一阶差商为常值映射。

注：

- 除特殊说明外，等差数列均指的是一阶等差数列；
- 下一章我们会知道，一阶差商是一阶导数的离散版本。

我们还可以通过二阶差分来定义二阶等差数列，“三角垛”就是个典型的例子。

定义（二阶差分） 对一阶差分映射 Δf 再做一次差分，得到二阶差分映射 $\Delta^2 f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ ：

$$\Delta^2 f(n) = \Delta(\Delta f)(n) = \Delta f(n+1) - \Delta f(n) = f(n+2) - 2f(n+1) + f(n)$$

若 $\Delta^2 f = d$ 是常值映射，则称 $\{a_n\}$ 为二阶等差数列。

注：二阶等差数列还具有以下等价刻画

- 一阶差分数列 $\{\Delta a_n\}$ 是等差数列；
- 存在二次函数 $g(x) = Ax^2 + Bx + C$ ($A \neq 0$)，使得 $a_n = g(n)$ 。

一般地，可以定义 k 阶等差数列。

定义 (k 阶等差数列) 设数列是映射 $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ ，若其 k 阶差分映射 $\Delta^k f$ 是常值映射，且 $\Delta^{k-1} f$ 不是常值映射，则称 $\{a_n\}$ 为 k 阶等差数列。

它的等价刻画是，存在 k 次多项式 $g(x) = \sum_{i=0}^k c_i x^i$ ($c_k \neq 0$)，使得 $a_n = g(n)$ 。

定义 (等比数列) 设映射 f 是**指数型函数** ($a \neq 0$ 且 $b \neq 0$)，即

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$k \mapsto f(k) = ab^k$$

考虑 f 在 $\mathbb{N}^*$ 上的限制 $g = f|_{\mathbb{N}^*}$ ，即

$$g: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(k) = f(k) = ab^k$$

其像集组成的序列称为等比数列。特别地，当 $b = 1$ 时，上述等比数列为**常数数列**。

等比数列也可用一阶商分是不为 0 的恒等映射来定义。

定义 (一阶商分) 设数列是映射 $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ ，且 $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(n) \neq 0$ ，定义商分映射 $\nabla f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ 为：

$$\nabla f(n) = \frac{f(n+1)}{f(n)}$$

若 $\nabla f = q \neq 0$ 是常值映射，则称 $\{a_n\}$ 为等比数列，常数 q 为**公比**。

等差数列和等比数列具有以下联系：对商分取自然对数，乘法结构转化为加法结构

$$\ln \nabla f(n) = \ln f(n+1) - \ln f(n) = \Delta(\ln f)(n)$$

即“一阶商分为常值”等价于“ $\ln f(n)$ 的一阶差分为常值”，换句话说，等比数列取对数后为等差数列；相反，等差数列取指数后为等比数列。

定义 (线性递推数列)： 设数列是映射 $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ ，满足 m 阶线性齐次递推关系

$$a_{n+m} + p_1 a_{n+m-1} + \cdots + p_m a_n = 0$$

则称 $\{a_n\}$ 为 (常系数) m 阶线性齐次递推数列。

我们可以通过线性递推数列的特征方程求出特征根，进而得到通项公式。以二阶递推 $a_{n+2} = p a_{n+1} + q a_n$ 为例，特征方程为 $r^2 - pr - q = 0$ ，若特征根为 r_1, r_2 ，则通项公式为：

$$a_n = A r_1^n + B r_2^n$$

其中 A, B 由初始条件 a_1, a_2 确定。

一个常见的例子是“**斐波那契数列**”，它定义成映射 $F: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ 的像集组成的序列，其中

- 初始条件： $F(1) = F(2) = 1$ ；
- 递归条件： 对 $n \geq 3$ ， $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$ 。

值得说明的是

- 斐波那契数列 $\{F(n)\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots\}$ 和兔子繁殖有关, 所以又称“兔子数列”;
- 斐波那契数列相邻项商分 $\frac{F(n+1)}{F(n)}$ 的极限是“黄金分割比”:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(n+1)}{F(n)} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618$$

7.2 等差数列的性质

本节探讨等差数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的性质。

等差数列对应映射 $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ ($a_n = f(n)$), 一阶差分 $\Delta f(n) = d$ 为常值, 我们对线性函数的性质已经足够熟悉, 我们不加证明地对等差数列的性质进行列举。

等差数列的通项 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 性质

性质 1 (通项公式) 对任意 $m, n \in \mathbb{N}^*$, 公差满足:

$$d = \frac{a_n - a_m}{n - m} \implies a_n = a_m + (n - m)d$$

注:

- 特别地,

$$d = \frac{a_n - a_1}{n - 1} \implies a_n = a_1 + (n - 1)d = dn + (a_1 - d)$$

- 本质是线性函数 $g(x) = dx + (a_1 - d)$ 在 $\mathbb{N}^*$ 上的限制;
- 若 $\{a_n\}$ (公差 d_a)、 $\{b_n\}$ (公差 d_b) 为等差数列, 则 $\{ka_n + lb_n\}$ (k, l 为常数) 是公差为 $kd_a + ld_b$ 的等差数列;
- 因线性映射可自然延拓到实数集, 故该式对虚拟项也成立。

性质 2 (下标和) 若 $m + n = p + q$ ($m, n, p, q \in \mathbb{N}^*$), 则 $a_m + a_n = a_p + a_q$ 。

注:

- 反过来不一定成立, 反例是取 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为常数列;
- 特别地, $a_{n-1} + a_{n+1} = 2a_n$, 称 a_n 为 a_{n-1} 与 a_{n+1} 的等差中项;
- 可推广到任意有限项的下标和: 若 $\sum_{i=1}^k m_i = \sum_{i=1}^k p_i$ ($m_i, p_i \in \mathbb{N}^*$), 则 $\sum_{i=1}^k a_{m_i} = \sum_{i=1}^k a_{p_i}$ 。

性质 3 (单调性) 由一阶差分 $\Delta f(n) = d$ 决定:

- $d > 0 \implies \{a_n\}$ 严格递增;
- $d = 0 \implies \{a_n\}$ 无单调性;
- $d < 0 \implies \{a_n\}$ 严格递减。

性质 4 (有界性)

- 递增等差数列 ($d > 0$): 有下界 (a_1), 无上界;
- 递减等差数列 ($d < 0$): 有上界 (a_1), 无下界;
- 常数列 ($d = 0$): 有界 (a_1).

性质 5 (周期性) 数列 $\{a_n \bmod m\}$ 是周期数列, 周期 $T \mid m$, 即 $a_{n+T} \equiv a_n \bmod m$.

等差数列的前 n 项和 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ 性质

性质 6 (求和公式) 利用“倒序相加”得到:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = \frac{d}{2}n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)n$$

注:

- 特别地, $S_{2n-1} = (2n-1)a_n$, 该式对虚拟项仍成立;
- 本质是二次函数 $h(x) = \frac{d}{2}x^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)x$ 在 $\mathbb{N}^*$ 上的限制;
- 若 $S_n = An^2 + Bn + C$ (A, B, C 为常数), 则: $C = 0 \iff \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是等差数列; $C \neq 0 \iff \{a_n\}_{n=2}^{\infty}$ 是等差数列;
- $a_n = dn + (a_1 - d)$ 和 $S_n = \frac{d}{2}n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)n$ 的系数和均为 a_1 , 并且首项系数是 2 倍关系, 这是等差数列 a_n 与 S_n 快速转化的技巧;
- 若 $S_m = S_n$ ($m \neq n, m, n \in \mathbb{N}^*$), 则 $S_{m+n} = 0$.

性质 7 (最值) 设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是公差为 d 的等差数列, $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是它的前 n 项和, 则:

- 若 $a_1 > 0, d < 0$, 则 S_n 的最大值在 $n_0 = \left\lfloor \frac{a_1}{|d|} + 1 \right\rfloor$ 处取得;
- 若 $a_1 < 0, d > 0$, 则 S_n 的最小值在 $n_0 = \left\lfloor \frac{|a_1|}{d} + 1 \right\rfloor$ 处取得。

性质 8 (由前 n 项和诱导的等差数列) 设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是公差为 d 的等差数列, $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是它的前 n 项和, 则:

- 数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ 是公差为 $\frac{d}{2}$ 的等差数列;
- 设 $S_k^{(m)} = S_{(m+1)k} - S_{mk}$ (第 $m+1$ 个 k 项和), 则 $\{S_k^{(m)}\}_{k=1}^{\infty}$ 是公差为 k^2d 的等差数列。

性质 9 (奇偶和) 设 $\{a_n\}_{n=1}^m$ 是有穷等差数列, 则:

- 当 $m = 2n$ 时, $S_{\text{偶}} - S_{\text{奇}} = nd, \frac{S_{\text{偶}}}{S_{\text{奇}}} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$;
- 当 $m = 2n - 1$ 时, $S_{\text{奇}} - S_{\text{偶}} = a_n, \frac{S_{\text{奇}}}{S_{\text{偶}}} = \frac{n}{n-1}$ 。

等差数列的前 n 积 $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ 性质

性质 10 (单调性) 设 $P_n = \prod_{k=1}^n a_k$ ($a_k \neq 0$), 则:

- $a_1 > 0, d > 0 \implies \{P_n\}$ 严格递增;
- $a_1 > 0, d < 0 \implies$ 当 $a_n > 0$ 时 P_n 递增, 当 $a_n < 0$ 时 P_n 递减。

性质 11 (基本不等式) 若 $a_k > 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$), 则:

$$P_n \leq \left(\frac{S_n}{n}\right)^n$$

当且仅当 $\{a_n\}$ 为常数数列时取等号。

性质 12 (对数转化) 令 $\ln P_n = \sum_{k=1}^n \ln a_k$, 则:

$$\Delta(\ln P_n) = \ln a_{n+1}$$

即 $\{\ln P_n\}$ 的差分等于对应项的对数。

7.3 等比数列的性质

7.4 斐波那契数列的性质



8 用导数研究函数

8.1 微积分的创立与发展

8.2 求差的推广——微分

8.3 求和的推广——积分



D 欧氏几何

9 用代数方法研究几何问题

9.1 代数系统——数系及其扩充

9.2 平面向量及其运算

9.3 解三角形

9.4 空间向量及其运算

9.5 简单几何体的表面积与体积

9.6 空间中点线面的位置关系

9.7 直线的方程

9.8 圆的方程

9.9 椭圆的方程

9.10 双曲线的方程

9.11 抛物线的方程



E 概率统计

10 概率统计

10.1 随机抽样，用样本估计总体

10.2 排列组合与二项式定理

10.3 古典概型，几何概型，条件概率与全概率公式，贝叶斯公式

10.4 离散型随机变量及其分布

10.5 二项分布与超几何分布，正态分布

10.6 成对数据的统计相关性

10.7 一元线性回归模型及其应用

10.8 列联表与独立性检验



F 初等数论

11 初等数论

11.1 从经典的数论问题出发：什么是数论

11.2 整除和同余

定义 1 (整除). 设 $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. 如果存在整数 k 使得 $a = kb$, 则称:

- b 整除 a , 记作 $b \mid a$
- b 是 a 的**因数** (或约数)
- a 是 b 的**倍数**

如果不存在这样的整数 k , 则称 b 不整除 a , 记作 $b \nmid a$.

定义 2 (素数). 大于 1 的整数 p 称为**素数**, 如果 p 的正因数只有 1 和 p 本身。

定理 11.1 (整除的基本性质). 设 $a, b, c \in \mathbb{Z}$, 则:

- (1) 自反性: $a \mid a$ ($a \neq 0$)
- (2) 传递性: 若 $a \mid b$ 且 $b \mid c$, 则 $a \mid c$
- (3) 线性组合性: 若 $a \mid b$ 且 $a \mid c$, 则对任意 $x, y \in \mathbb{Z}$, 有 $a \mid (bx + cy)$
- (4) 符号不变性: $a \mid b \iff -a \mid b \iff a \mid -b \iff -a \mid -b \iff |a| \mid |b|$
- (5) 大小关系: 若 $b \mid a$ 且 $|a| < |b|$, 则 $a = 0$
- (6) 消去律: 若 $c \mid ab$ 且 $\gcd(b, c) = 1$, 则 $c \mid a$
- (7) 积的整除: 若 $b \mid a$, $c \mid a$, 且 $\gcd(b, c) = 1$, 则 $bc \mid a$

证明. (1)-(2) 由定义直接验证。

(3) 由 $a \mid b$ 和 $a \mid c$ 得 $b = ma$, $c = na$, 故 $bx + cy = (mx + ny)a$.

(4) 整除关系只与绝对值有关, 符号不影响整除性。

(5) 设 $a = kb$, 若 $|a| < |b|$ 则 $|k| < 1$, 故 $k = 0$, $a = 0$ 。

(6) 由裴蜀定理, 存在 s, t 使 $bs + ct = 1$, 从而 $abs + act = a$, 由于 $c \mid ab$, 故 $c \mid a$ 。

(7) 由 $b \mid a$ 得 $a = bm$, 又 $c \mid bm$ 且 $\gcd(b, c) = 1$, 由 (6) 得 $c \mid m$, 故 $bc \mid bm = a$. $\square$

定理 11.2 (幂的整除公式). (1) 平方差公式: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

(2) 一般公式: $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$

(3) 奇数次和: 当 n 为奇数时, $a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1})$

(4) 偶数次差: 当 n 为偶数时, $a^n - b^n$ 可反复使用平方差公式分解

推论 11.3 (幂的整除性). • 对任意 $n \in \mathbb{Z}^+$, 有 $a - b \mid a^n - b^n$

- 若 n 为正奇数, 则 $a+b \mid a^n + b^n$
- 若 n 为正偶数, 则 $a+b \mid a^n - b^n$

定理 11.4 (带余除法定理). 对任意整数 a 和正整数 b , 存在唯一的整数对 (q, r) 使得:

$$a = bq + r, \quad 0 \leq r < b$$

其中 q 称为商, r 称为余数。

定理 11.5 (连续整数的性质). 任意 n 个连续整数中:

- (1) 必有一个是 n 的倍数
- (2) 它们的乘积能被 $n!$ 整除
- (3) 如果 n 是素数, 则其中必有一个与 n 互素 (除了 n 的倍数)

证明. (1) 设连续整数为 $k, k+1, \dots, k+n-1$, 它们除以 n 的余数必然取遍 $0, 1, \dots, n-1$.

(2) 组合数 $\binom{k+n-1}{n}$ 是整数, 且等于连续整数乘积除以 $n!$.

(3) 如果 n 是素数, 除了 n 的倍数外, 其他数都与 n 互素。 □

定义 3 (最大公因数). 整数 a, b 的**最大公因数** $\gcd(a, b)$ 是能同时整除 a 和 b 的最大正整数。

定义 4 (最小公倍数). 整数 a, b 的**最小公倍数** $\text{lcm}(a, b)$ 是能同时被 a 和 b 整除的最小正整数。

定理 11.6 (基本性质). (1) 欧几里得算法: 若 $a = bq + r$, 则 $\gcd(a, b) = \gcd(b, r)$

(2) 乘积关系: $ab = \gcd(a, b) \cdot \text{lcm}(a, b)$

(3) 裴蜀定理: 存在整数 s, t 使得 $as + bt = \gcd(a, b)$

(4) 互素判定: $\gcd(a, b) = 1 \iff \exists s, t \text{ 使 } as + bt = 1$

证明. (1) 设 $d = \gcd(a, b)$, 则 $d \mid a$ 且 $d \mid b$, 故 $d \mid r = a - bq$. 反之也成立。

(2) 设 $d = \gcd(a, b)$, $a = da'$, $b = db'$, 则 $\text{lcm}(a, b) = da'b'$.

(3) 考虑集合 $S = \{as + bt > 0 : s, t \in \mathbb{Z}\}$, 其最小元即为 $\gcd(a, b)$ 。 □

例 11.7. 证明: 对任意正整数 n , $n^3 + 2n$ 能被 3 整除。

证明. 考虑模 3 的情况:

- 若 $n \equiv 0 \pmod{3}$, 则 $n^3 + 2n \equiv 0$
 - 若 $n \equiv 1 \pmod{3}$, 则 $n^3 + 2n \equiv 1 + 2 \equiv 0$
 - 若 $n \equiv 2 \pmod{3}$, 则 $n^3 + 2n \equiv 8 + 4 \equiv 12 \equiv 0$
-

例 11.8. 证明: 若 $\gcd(a, b) = 1$, 则 $\gcd(a+b, ab) = 1$ 。

证明. 设 $d = \gcd(a+b, ab)$, 则 $d \mid a+b$ 且 $d \mid ab$ 。

由裴蜀定理, 存在 s, t 使 $as + bt = 1$, 于是:

$$(a+b)s + b(t-s) = as + bt = 1$$

故 $d \mid 1$, 即 $d = 1$ 。 □

例 11.9. 证明: 对任意正整数 n , $n^5 - n$ 能被 30 整除。

证明. 因式分解: $n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n-1)(n+1)(n^2+1)$

只需证明能被 2,3,5 整除:

- 2: $n(n-1)$ 是连续两数, 必有一个偶数
- 3: $n-1, n, n+1$ 是连续三数, 必有一个 3 的倍数
- 5: 考虑模 5 的剩余系, 验证每个情况

□

定义 5 (同余). 设 $a, b \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}^+$, 若 $m \mid (a-b)$, 则称 a 与 b 模 m 同余, 记作:

$$a \equiv b \pmod{m}$$

等价地, 存在整数 q_1, q_2, r 使得:

$$\begin{cases} a = mq_1 + r \\ b = mq_2 + r \end{cases} \quad \text{其中 } 0 \leq r < m$$

性质 1 (自反性). 对任意整数 a 和正整数 m , 有 $a \equiv a \pmod{m}$ 。

性质 2 (对称性). 若 $a \equiv b \pmod{m}$, 则 $b \equiv a \pmod{m}$ 。

性质 3 (传递性). 若 $a \equiv b \pmod{m}$ 且 $b \equiv c \pmod{m}$, 则 $a \equiv c \pmod{m}$ 。

定理 11.10 (加法保持性). 若 $a \equiv b \pmod{m}$ 且 $c \equiv d \pmod{m}$, 则

$$a + c \equiv b + d \pmod{m}$$

定理 11.11 (减法保持性). 若 $a \equiv b \pmod{m}$ 且 $c \equiv d \pmod{m}$, 则

$$a - c \equiv b - d \pmod{m}$$

定理 11.12 (乘法保持性). 若 $a \equiv b \pmod{m}$ 且 $c \equiv d \pmod{m}$, 则

$$ac \equiv bd \pmod{m}$$

定理 11.13 (幂运算保持性). 若 $a \equiv b \pmod{m}$, 则对任意正整数 n 有

$$a^n \equiv b^n \pmod{m}$$

定理 11.14 (模的约简). 若 $a \equiv b \pmod{m}$ 且 $d \mid m$, 则

$$a \equiv b \pmod{d}$$

定理 11.15 (最大公约数保持性). 若 $a \equiv b \pmod{m}$, 则

$$(a, m) = (b, m)$$

例 11.16. 证明: 若 $a \equiv b \pmod{m}$ 且 $c \equiv d \pmod{m}$, 则

$$a^2 + 3c \equiv b^2 + 3d \pmod{m}$$

证明. 由已知条件, 根据乘法保持性得 $a^2 \equiv b^2 \pmod{m}$, 根据数乘性质得 $3c \equiv 3d \pmod{m}$, 再根据加法保持性得:

$$a^2 + 3c \equiv b^2 + 3d \pmod{m}$$

□

例 11.17. 证明: 对任意正整数 n , $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ 能被 7 整除。

证明. 注意到:

$$\begin{aligned} 3^{2n+1} + 2^{n+2} &= 3 \cdot 9^n + 4 \cdot 2^n \\ &\equiv 3 \cdot 2^n + 4 \cdot 2^n \pmod{7} \\ &= 7 \cdot 2^n \equiv 0 \pmod{7} \end{aligned}$$

故 $7 \mid (3^{2n+1} + 2^{n+2})$ 。

□

例 11.18. 设 $f(x)$ 是整系数多项式, a 是整数, 证明存在无穷多个整数 b , 使得 $f(a) \mid f(b)$ 。

证明. 取 $b = a + k|f(a)|$, 其中 $k \in \mathbb{Z}$ 。由于:

$$b - a = k|f(a)| \mid f(b) - f(a)$$

故 $f(a) \mid f(b) - f(a)$, 从而 $f(a) \mid f(b)$ 。由 k 的任意性知这样的 b 有无穷多个。

□

例 11.19. 证明: 若 $a \equiv b \pmod{m}$, 则对任意正整数 n 和整数 c , 有:

$$(a + cm)^n \equiv b^n \pmod{m}$$

证明. 由 $a \equiv b \pmod{m}$ 得 $m \mid (a - b)$, 故存在整数 k 使得 $a = b + km$ 。于是:

$$(a + cm)^n = (b + km + cm)^n = (b + (k + c)m)^n$$

由二项式定理展开, 除第一项 b^n 外, 其余各项都含有因子 m , 故:

$$(a + cm)^n \equiv b^n \pmod{m}$$

□

例 11.20. 证明: 对任意正整数 n , 有:

$$1. 5^{2n} \equiv 1 \pmod{8}$$

$$2. 3^{n+2} + 4^{2n+1} \equiv 0 \pmod{13}$$

证明. 1. $5^2 = 25 \equiv 1 \pmod{8}$, 故 $5^{2n} = (5^2)^n \equiv 1^n = 1 \pmod{8}$ 。

2. 计算得 $3^2 = 9 \equiv 9 \pmod{13}$, $4^2 = 16 \equiv 3 \pmod{13}$, 进一步计算可得结论。

□

例 11.21. 设 a, b, c, m 是整数, $m > 0$, 证明:

1. 若 $ac \equiv bc \pmod{m}$ 且 $(c, m) = 1$, 则 $a \equiv b \pmod{m}$

2. 若 $a \equiv b \pmod{m}$ 且 $d \mid m$, 则 $a \equiv b \pmod{d}$

3. 若 $a \equiv b \pmod{m}$ 且 $a \equiv b \pmod{n}$, 则 $a \equiv b \pmod{[m,n]}$

证明. 1. 由 $(c, m) = 1$ 和 $m \mid c(a-b)$ 得 $m \mid (a-b)$ 。

2. 由 $d \mid m$ 和 $m \mid (a-b)$ 得 $d \mid (a-b)$ 。

3. 设 $L = [m, n]$, 由 $m \mid (a-b)$ 和 $n \mid (a-b)$ 得 $L \mid (a-b)$ 。

□

例 11.22. 证明: 若 p 是奇素数, 则:

$$1^p + 2^p + \cdots + (p-1)^p \equiv 0 \pmod{p}$$

证明. 利用费马小定理, 对 $1 \leq k \leq p-1$, 有 $k^p \equiv k \pmod{p}$, 故:

$$1^p + 2^p + \cdots + (p-1)^p \equiv 1 + 2 + \cdots + (p-1) = \frac{p(p-1)}{2} \pmod{p}$$

由于 p 是奇素数, $p-1$ 是偶数, 故 $\frac{p-1}{2}$ 是整数, 所以 $\frac{p(p-1)}{2} \equiv 0 \pmod{p}$ 。

□

11.2.1 习题 1: 整数的离散性

定理 11.23 (整数的离散性). 对于任意不相等的整数 $a, b \in \mathbb{Z}$, 有 $|a-b| \geq 1$ 。

例 11.24. 求正整数 a, b 满足 $a^2 + ab + b^2 = 73$ 。

解. 由恒等式

$$(a+b)^2 = ab + a^2 + ab + b^2 = ab + (a^2 + ab + b^2) = ab + 73$$

又

$$(a+b)^2 = ab + 73 \leq \frac{(a+b)^2}{4} + 73$$

解得

$$(a+b)^2 \leq \frac{4}{3} \times 73 \approx 97.33$$

所以 $a+b \leq 21$ 。尝试 $a+b = 19, 20, 21$:

1. 当 $a+b = 19$ 时, $ab = 361 - 73 = 18$, 解得 $(a, b) = (1, 18)$ 或 $(18, 1)$

2. 当 $a+b = 20$ 时, $ab = 400 - 73 = 327$, 无整数解

3. 当 $a+b = 21$ 时, $ab = 441 - 73 = 368$, 解得 $(a, b) = (7, 14)$ 或 $(14, 7)$

共有四组解。

□

例 11.25. 设 $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$, 满足 $c^2 - 1 = a^2(b^2 - 1)$, 且 $a > 1$ 。求 $\frac{a}{b}$ 的最小值。

解. 由条件得

$$c^2 - 1 = a^2b^2 - a^2$$

因为 $a > 1$, 所以 $c^2 < a^2b^2$, 即 $c < ab$, 从而 $c \leq ab - 1$ 。

代入得

$$a^2b^2 - a^2 = c^2 - 1 \leq (ab - 1)^2 - 1 = a^2b^2 - 2ab$$

整理得

$$a^2 \geq 2ab \Rightarrow \frac{a}{b} \geq 2$$

当 $a = 2, b = 1, c = 1$ 时取等号, 最小值为 2。

□

例 11.26. 令 $S(n)$ 表示正整数 n 的各位数字之和。求最大的正整数 n , 满足:

1. 各个数位的数字都不是 0

2. $2^{S(n)} = S(n^2)$

解. 设 n 为 k 位数, 则 $S(n) \geq k$, 且:

$$10^{k-1} \leq n < 10^k \Rightarrow n^2 < 10^{2k}$$

所以:

$$S(n^2) \leq 2k \times 9 = 18k$$

由条件 $2^{S(n)} = S(n^2)$ 得:

$$2^k \leq 2^{S(n)} = S(n^2) \leq 18k \Rightarrow k \leq 6$$

又因为 $2^{S(n)} \leq 18 \times 6 = 108$, 所以 $S(n) \leq 6$ 。

若 $S(n) = 6$, 则 $3 \mid n \Rightarrow 3 \mid n^2 \Rightarrow 3 \mid S(n^2)$, 但 $3 \nmid 2^6$, 矛盾。

故 $1 \leq S(n) \leq 5$, 且 $S(n^2) = 2, 4, 8, 16, 32$ 。

经检验, $n = 1111$ 时, $n^2 = 1234321$, $S(n^2) = 16 = 2^4$, 满足条件。□

例 11.27. 有 4 个不同的三位正整数, 首位数字相同, 且它们的和能被其中 3 个整除。求这 4 个数。

解. 设这四个数为 x_1, x_2, x_3, x_4 , 首位数字为 a , 总和 $S = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ 。

对每个 x_i , 有 $100a \leq x_i \leq 100(a+1)$, 所以:

$$x_i + 300a < S < x_i + 300(a+1)$$

即:

$$1 + \frac{300a}{x_i} < \frac{S}{x_i} < 1 + \frac{300(a+1)}{x_i}$$

进一步放缩得:

$$1 + \frac{3a}{a+1} < \frac{S}{x_i} < 1 + \frac{3(a+1)}{a} = 4 + \frac{3}{a}$$

通过枚举验证, 得到符合条件的四个数。□

11.2.2 习题 2: 整除的概念和性质

例 11.28. 设 $a, b, c, d \in \mathbb{Z}^+$, 且 $ad - bc > 1$ 。证明: a, b, c, d 中至少有一个数不能被 $ad - bc$ 整除。

证明. 反证法。假设 a, b, c, d 都能被 $ad - bc$ 整除, 设:

$$\begin{cases} a = k_1(ad - bc) \\ b = k_2(ad - bc) \\ c = k_3(ad - bc) \\ d = k_4(ad - bc) \end{cases}$$

则:

$$ad - bc = (k_1k_4 - k_2k_3)(ad - bc)^2$$

即:

$$k_1k_4 - k_2k_3 = \frac{1}{ad - bc} \in (0, 1)$$

这与 $k_1k_4 - k_2k_3 \in \mathbb{Z}$ 矛盾。□

例 11.29. 设数列 $\{a_n\}$ 满足: 对任意 $n > 1$, 有 $(n-1)a_{n+1} = (n+1)a_n - 2(n-1)$ 。若 $2000 \mid a_{1999}$, 求最小的 n 使得 $2000 \mid a_n$ 。

解. 将递推式变形为:

$$\frac{a_{n+1}}{n(n+1)} = \frac{a_n}{n(n+1)} - \frac{2}{n(n+1)}$$

令 $b_n = \frac{a_n}{n(n+1)}$, 则 $b_{n+1} - b_n = -\frac{2}{n(n+1)}$ 。

累加得:

$$b_n = \frac{a_2}{2} + \frac{2}{n} - 1$$

设 $a_2 = 2m$, 则:

$$a_n = (n-1)[n(m-1) + 2]$$

由 $2000 \mid a_{1999}$ 得 $1000 \mid 999[1999(m-1) + 2]$, 故 $1000 \mid 1999(m-1) + 2$ 。

设 $m = 1000k + 3$, 则 $a_n = (n-1)[n(1000k+2) + 2]$ 。

要求 $2000 \mid a_n$, 即 $2000 \mid 2(n^2 - 1)$, 所以 $1000 \mid n^2 - 1$ 。

设 $n = 2t + 1$, 则 $1000 \mid 4t(t+1)$, 即 $250 \mid t(t+1)$ 。

因为 $250 = 2 \times 5^3$, 所以 $125 \mid t$ 或 $125 \mid t+1$, 最小 $t = 124$, $n = 249$ 。

□

例 11.30. 确定使 $(ab^2 + b + 7) \mid (a^2b + a + b)$ 的全部正整数对 (a, b) 。

解. 构造线性组合:

$$b(a^2b + a + b) - a(ab^2 + b + 7) = b^2 - 7a$$

所以 $(ab^2 + b + 7) \mid (b^2 - 7a)$ 。

分情况讨论:

1. $b^2 - 7a = 0$, 即 $b^2 = 7a$, $(a, b) = (7k^2, 7k)$
2. $b^2 - 7a > 0$, 则 $0 < b^2 - 7a < b^2 \leq ab^2 < ab^2 + b + 7$, 矛盾
3. $b^2 - 7a < 0$, 则 $7a - b^2 \geq ab^2 + b + 7$

若 $b \geq 3$, 则 $ab^2 \geq 9a > 7a$, 矛盾。故 $b = 1$ 或 2 。

- $b = 1$: $\frac{7a-1}{a+8} \in \mathbb{Z}$, 解得 $(a, b) = (11, 1), (49, 1)$

- $b = 2$: $\frac{7a-4}{4a+9} \in \mathbb{Z}$, 无解

综上, 解为 $(7k^2, 7k), (11, 1), (49, 1)$ 。

□

例 11.31. 求所有有序正整数对 (m, n) , 使 $\frac{n^3+1}{mn-1}$ 是整数。

解. 由 $(mn-1) \mid (n^3+1)$, 又 $(mn-1) \mid (m^3n^3-1)$, 所以:

$$(mn-1) \mid [m^3(n^3+1) - (m^3n^3-1)] = m^3 + 1$$

故 m, n 地位对称。不妨设 $m \geq n$ 。

1. $m = n$: $\frac{n^3+1}{n^2-1} = n + \frac{n+1}{n^2-1}$, 仅当 $n = 2$ 时整数, $(2, 2)$
2. $m > n$:

- $n = 1$: $\frac{2}{m-1} \in \mathbb{Z}$, $(m, n) = (2, 1), (3, 1)$
- $n \geq 2$: 设 $\frac{n^3+1}{mn-1} = k$, 可证 $k = n - 1$, 解得 $(m, n) = (5, 2), (5, 3)$

考虑对称性, 共 9 组解。 □

例 11.32. 求所有素数 p, q , 满足 $p \mid (q+6)$, $q \mid (p+7)$ 。

解. 显然 p, q 为奇素数。由 $p \mid (q+6)$ 得 $q+6 \geq 2p$, 所以 $q \geq 2p-6$ 。

又 $q \mid (p+7)$, 所以 $q \leq p+7$ 。

联立得 $2p-6 \leq p+7 \Rightarrow p \leq 13$ 。

枚举 $p = 3, 5, 7, 11, 13$, 验证得唯一解 $p = 19, q = 13$ 。 □

例 11.33. 设 a, b, n 为给定的正整数。已知对任意 $k \in \mathbb{Z}^+ (k \neq b)$, 都有 $(b-k) \mid (a-k^n)$ 。证明: $a = b^n$ 。

证明. 由条件 $(b-k) \mid (a-k^n)$, 又 $(b-k) \mid (b^n-k^n)$, 所以:

$$(b-k) \mid (a-b^n)$$

取 $k = b+1+|a-b^n|$, 则 $|b-k| = 1+|a-b^n| > |a-b^n|$ 。

但 $(b-k) \mid (a-b^n)$, 所以只能 $a-b^n = 0$, 即 $a = b^n$ 。 □

11.2.3 习题 3: 带余除法与欧几里得算法

例 11.34. 设 $a, b \in \mathbb{Z}^+$, $b > 2$ 。证明: $(2^b-1) \nmid (2^a+1)$ 。

证明. 分情况讨论:

1. $a < b$: 则 $2^a+1 \leq 2^{b-1}+1 < 2^b-1$, 显然不整除
2. $a = b$: $2^a+1 = (2^b-1)+2$, 若整除则 $(2^b-1) \mid 2$, 但 $b > 2$ 矛盾
3. $a > b$: 设 $a = bq+r$, $0 \leq r < b$

$$2^a+1 = 2^{bq+r}+1 = 2^r(2^{bq}-1) + (2^r+1)$$

若 $(2^b-1) \mid (2^a+1)$, 则 $(2^b-1) \mid (2^r+1)$ 。

但 $2^r+1 \leq 2^{b-1}+1 < 2^b-1$, 矛盾。 □

例 11.35. 设 $a, m, n \in \mathbb{Z}^+$ 。证明: $\gcd(a^m-1, a^n-1) = a^{\gcd(m,n)}-1$ 。

证明. 不妨设 $m > n$ 。由带余除法, 设 $m = nq+r$, $0 \leq r < n$ 。

则:

$$\gcd(a^m-1, a^n-1) = \gcd(a^{nq+r}-1, a^n-1) = \gcd(a^r(a^{nq}-1) + (a^r-1), a^n-1)$$

因为 $a^n-1 \mid a^{nq}-1$, 所以:

$$\gcd(a^m-1, a^n-1) = \gcd(a^r-1, a^n-1)$$

继续对指数进行欧几里得算法, 最终得到 $\gcd(a^m-1, a^n-1) = a^{\gcd(m,n)}-1$ 。 □

11.2.4 习题 4: 裴蜀定理及其应用

定理 11.36 (裴蜀定理). 设 $d = \gcd(a, b)$, 则存在整数 x, y 使得 $xa + yb = d$.

注. 1. 逆定理不成立, 因为 $(kx)a + (ky)b = kd$

2. 解不唯一: $(x_0 + kb)a + (y_0 - ka)b = d$

3. 充分必要条件: $\gcd(a, b) = d \iff d \mid a, d \mid b$ 且存在 x, y 使 $xa + yb = d$

4. 可推广到多个整数的情况

□

例 11.37 (欧几里得引理). p 是素数, $p \mid ab \Rightarrow p \mid a$ 或 $p \mid b$.

证明. 若 $p \nmid a$, 则 $\gcd(p, a) = 1$, 存在 u, v 使 $up + va = 1$.

两边乘 b 得 $ubp + vab = b$, 所以 $p \mid b$.

□

例 11.38. 关于 x, y 的不定方程 $ax + by = c$ 有整数解的充要条件是 $\gcd(a, b) \mid c$.

证明. 必要性显然. 充分性: 设 $\gcd(a, b) = d, c = kd$.

由裴蜀定理, 存在 x_0, y_0 使 $ax_0 + by_0 = d$, 所以 $a(kx_0) + b(ky_0) = c$.

□

例 11.39. 设 $n \geq m > 0$, 证明: $\frac{\gcd(m, n)}{n} \binom{n}{m} \in \mathbb{N}^*$.

证明. 由裴蜀定理, 存在整数 x, y 使 $xm + yn = \gcd(m, n)$.

所以:

$$\frac{\gcd(m, n)}{n} \binom{n}{m} = \frac{xm}{n} \binom{n}{m} + y \binom{n}{m}$$

利用恒等式 $m \binom{n}{m} = n \binom{n-1}{m-1}$, 得:

$$\frac{xm}{n} \binom{n}{m} = x \binom{n-1}{m-1} \in \mathbb{Z}$$

故原式为整数.

□

例 11.40. 证明: 存在有理数 $\frac{q}{p}$, 其中 $p < 100$, 使得 $\left\lfloor k \cdot \frac{q}{p} \right\rfloor = \left\lfloor k \cdot \frac{73}{100} \right\rfloor$ 对 $k = 1, 2, \dots, 99$ 成立.

证明. 只需证明存在 $p < 100$ 使得:

$$\left\lfloor k \cdot \frac{q}{p} \right\rfloor \leq k \cdot \frac{73}{100} < \left\lfloor k \cdot \frac{q}{p} \right\rfloor + 1$$

□

11.3 不定方程: 勾股数组, 方程 $x^4 + y^4 = z^4$, 线性不定方程

不定方程是数论研究的核心内容之一, 主要研究多项式方程的整数解或有理数解. 从古老的勾股定理到费马大定理, 从线性方程到椭圆曲线, 不定方程的理论既有着悠久的历史传承, 又包含着现代数论的前沿问题.

勾股数组的研究可以追溯到古代文明时期。早在公元前 1800 年左右的古巴比伦泥板普林顿 322 号 (Plimpton 322) 上就系统地记载了 15 组勾股数, 其中包含一些相当大的数值, 如:

$$(119, 120, 169), (3367, 3456, 4825), (4601, 4800, 6649), (12709, 13500, 18541)$$

这些勾股数的发现表明古巴比伦人已经掌握了生成勾股数组的系统方法。在中国,《周髀算经》中记载了“勾三股四弦五”的特例,而《九章算术》则给出了勾股数组的一般解法。古希腊数学家毕达哥拉斯(公元前 570-495 年)及其学派对勾股数进行了系统研究,但最早给出勾股数组通解公式的是欧几里得(公元前 300 年左右)。在《几何原本》第 10 卷的引理 1 中,欧几里得给出了生成本原勾股数组的公式,这也就是我们将在本节学习的内容。

从几何角度看,勾股数组对应着三边均为整数的直角三角形。寻找勾股数组等价于寻找单位圆上的有理点,这建立了几何与数论之间的深刻联系。

从数论角度看,勾股数组的研究促进了以下重要发展:

- 平方和问题的研究
- 代数数论中唯一分解性质的探索
- 椭圆曲线有理点的研究
- 模形式和自守形式理论的发展

费马大定理 ($x^n + y^n = z^n$ 在 $n > 2$ 时无非平凡整数解) 正是勾股方程的自然推广,这个问题的研究推动了整个现代数论的发展。

勾股数组

定义 6 (勾股数组). 称满足 $a^2 + b^2 = c^2$ 的正整数组 (a, b, c) 为**勾股数组** (或称毕达哥拉斯三元组)。

注 1. 勾股数组源于几何上的勾股定理,例如 $(3, 4, 5)$ 对应着“勾三股四弦五”的直角三角形。

定理 11.41. 存在无穷多组勾股数组。

证明. 若 (a, b, c) 是一组勾股数组,则对任意正整数 $d \geq 1$, (da, db, dc) 也是勾股数组,由于存在无穷多个正整数 d ,故存在无穷多组勾股数组。□

注 2. 这个构造只给出了相似的勾股数组。是否存在无穷多组互不相似的勾股数组?

定义 7 (本原勾股数组). 称满足 $a^2 + b^2 = c^2$ 且 $\gcd(a, b, c) = 1$ 的正整数组 (a, b, c) 为**本原勾股数组**。

例 11.42 (本原勾股数组的例子). $(3, 4, 5)$, $(5, 12, 13)$, $(7, 24, 25)$, $(8, 15, 17)$, $(9, 40, 41)$, $(11, 60, 61)$, $(12, 35, 37)$, $(20, 21, 29)$, $(28, 45, 53)$ 等都是本原勾股数组。

引理 11.43 (本原勾股数组的基本性质). 若 (a, b, c) 为本原勾股数组,则:

- (1) a, b 一奇一偶, c 为奇数
- (2) a 或 b 是 3 的倍数
- (3) a, b, c 中至少有一个是 5 的倍数

证明. (1) 首先证明 a, b 不能同为偶数: 若 a, b 均为偶数, 则 $c^2 = a^2 + b^2$ 也是偶数, 从而 c 为偶数. 这样 $\gcd(a, b, c) \geq 2$, 与“本原”的定义矛盾; 再证明 a, b 不能同为奇数: 假设 a, b 均为奇数, 设 $a = 2x + 1, b = 2y + 1$, 则:

$$a^2 \equiv 1 \pmod{4}, \quad b^2 \equiv 1 \pmod{4}$$

所以 $a^2 + b^2 \equiv 2 \pmod{4}$, 但完全平方数模 4 只能为 0 或 1, 矛盾! 因此 a, b 一奇一偶, 又 $a^2 + b^2$ 是奇数, 故 c 为奇数.

(2) 若 a, b 都不是 3 的倍数, 则 $a^2 \equiv 1 \pmod{3}, b^2 \equiv 1 \pmod{3}$, 所以 $a^2 + b^2 \equiv 2 \pmod{3}$, 但完全平方数模 3 只能为 0 或 1, 矛盾! 故 a 或 b 是 3 的倍数.

(3) 若 a, b, c 都不是 5 的倍数, 则平方数模 5 可能为 1 或 4, 检查所有情况发现 $a^2 + b^2$ 模 5 可能为 0, 2, 3, 而 c^2 模 5 只能为 1 或 4, 矛盾! $\square$

本原勾股数组通解公式

引理 11.44. 若 (a, b, c) 为本原勾股数组 (设 a 为奇数, b 为偶数), 则 $\gcd(c+b, c-b) = 1$, 且 $c+b$ 和 $c-b$ 都是平方数.

证明. 设 $d = \gcd(c+b, c-b)$, 则 d 整除它们的和与差:

$$d \mid [(c+b) + (c-b)] = 2c, \quad d \mid [(c+b) - (c-b)] = 2b$$

所以 d 是 $2b$ 和 $2c$ 的公因数.

另一方面, d 也整除它们的乘积:

$$d \mid (c+b)(c-b) = c^2 - b^2 = a^2$$

断言 $d = 1$. (假设 $d > 1$, 则 d 有素因子 p , 由 $p \mid a^2$ 得 $p \mid a$. 又因为 $p \mid 2b$ 且 $p \mid 2c$, 如果 p 能整除 b 或 c , 则 p 将同时整除 a, b, c 中的两个, 与 $\gcd(a, b, c) = 1$ 矛盾. 因此 p 必须整除 2, 即 $p = 2$. 但 a 是奇数, 故 a^2 是奇数, 而 d 是 a^2 的因数, 所以 d 必须是奇数. 这说明 d 不可能含有素因子 2, 矛盾! 因此 $d = 1$.)

现在, 由于 $\gcd(c+b, c-b) = 1$, 且 $(c+b)(c-b) = a^2$ 是平方数, 根据**算术基本定理**可得结论: 如果一个平方数可以分解为两个互素正整数的乘积, 那么这两个因数本身也必须是平方数. (因为在标准分解式中, 每个素因子的指数都是偶数, 而互素意味着没有公共素因子, 所以每个素因子的指数必须均匀分配到两个因数中)

因此, 存在互素的正整数 $s > t \geq 1$, 使得:

$$c+b = s^2, \quad c-b = t^2$$

$\square$

定理 11.45 (本原勾股数组通解公式). 本原勾股数组 (a, b, c) (a 为奇数, b 为偶数) 的一切解由以下公式给出:

$$a = st, \quad b = \frac{s^2 - t^2}{2}, \quad c = \frac{s^2 + t^2}{2}$$

其中 $s > t \geq 1$ 是互素的奇数.

证明. 由引理, 设 $c+b = s^2, c-b = t^2$, 其中 $s > t \geq 1$ 是互素的正整数. 解这个方程组:

$$c = \frac{s^2 + t^2}{2}, \quad b = \frac{s^2 - t^2}{2}$$

而 $a = \sqrt{(c+b)(c-b)} = \sqrt{s^2 t^2} = st$ 。

现在证明 s, t 必须是奇数。由于 b, c 都是整数, $s^2 + t^2$ 和 $s^2 - t^2$ 必须是偶数。如果 s, t 一奇一偶, 则 $s^2 + t^2$ 和 $s^2 - t^2$ 都是奇数, 矛盾。因此 s, t 同奇偶。但如果 s, t 都是偶数, 则与 $\gcd(s, t) = 1$ 矛盾。故 s, t 必须都是奇数。□

例 11.46 (取互素奇数构造本原勾股数组)。取 $s = 3, t = 1$, 得到 $(3, 4, 5)$; 取 $s = 5, t = 3$, 得到 $(15, 8, 17)$; 取 $s = 5, t = 1$, 得到 $(5, 12, 13)$ 。

推论 11.47. 单位圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 上的一切有理点 (除 $(-1, 0)$ 外) 可由下式给出:

$$\left(\frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}, \frac{2mn}{m^2 + n^2} \right)$$

其中 m, n 为互素的整数, 且 $m > n > 0$ 。

证明. 设 (x, y) 是单位圆上的有理点, 即 $x = \frac{a}{c}, y = \frac{b}{c}$, 其中 a, b, c 是整数, 且满足 $a^2 + b^2 = c^2$ 。我们可以假设 $\gcd(a, b, c) = 1$, 即考虑本原勾股数组。

由本原勾股数组通解公式, 存在互素的奇数 $s > t \geq 1$, 使得:

$$a = st, \quad b = \frac{s^2 - t^2}{2}, \quad c = \frac{s^2 + t^2}{2}$$

于是:

$$x = \frac{a}{c} = \frac{2st}{s^2 + t^2}, \quad y = \frac{b}{c} = \frac{s^2 - t^2}{s^2 + t^2}$$

令 $m = s, n = t$, 即得所求公式。

几何上, 这对应着过点 $(-1, 0)$ 斜率为 $t = \frac{n}{m}$ 的直线与单位圆的交点参数化。□

方程 $x^4 + y^4 = z^4$

费马大定理是数学史上最著名的问题之一。1637 年, 法国数学家皮埃尔·德·费马在阅读丢番图的《算术》时, 在书边写下了著名的猜想:

“不可能将一个立方数写成两个立方数之和, 或将一个四次幂写成两个四次幂之和, 或者一般地, 不可能将一个高于二次的幂写成两个同次幂之和。”

用现代数学语言表述, 即方程 $a^n + b^n = c^n$ 在 $n > 2$ 时没有正整数解。费马声称他有一个“绝妙的证明”, 但书边空白太小, 写不下。这个猜想在此后 358 年间一直未被证明, 直到 1994 年由英国数学家安德鲁·怀尔斯最终证明。

有趣的是, 费马本人确实证明了 $n = 4$ 的情形, 他使用的方法就是著名的“无穷递降法”。本节将通过这一方法详细证明 $n = 4$ 的情形。

定义 8 (本原解). 如果一组正整数解 (x, y, z) 满足 $\gcd(x, y, z) = 1$, 则称其为方程的本原解。

注 3. 在研究不定方程时, 我们通常可以只考虑本原解, 因为任何非本原解都可以通过除以最大公因数转化为本原解。

引理 11.48. 若 x 为奇数, 则 $x^2 \equiv 1 \pmod{4}$ 。

证明. 设 $x = 2n + 1$, 其中 $n \in \mathbb{N}$, 则

$$x^2 = (2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 4(n^2 + n) + 1,$$

故 $x^2 \equiv 1 \pmod{4}$ 。□

定理 11.49 (费马大定理 $n = 4$ 情形). 方程 $x^4 + y^4 = z^4$ 没有正整数解。

证明. 我们将证明一个更强的结论: 方程 $x^4 + y^4 = z^2$ 没有正整数解。显然, 如果 $x^4 + y^4 = z^4$ 有解, 则令 $w = z$, 可得 $x^4 + y^4 = (z^2)^2 = w^2$, 与更强的结论矛盾。

假设存在正整数解 (x, y, z) 满足 $x^4 + y^4 = z^2$ 。不妨设 $\gcd(x, y, z) = 1$, 令 $a = x^2$, $b = y^2$, $c = z$, 则

$$a^2 + b^2 = c^2, \quad \gcd(a, b, c) = 1.$$

由勾股数通解公式, 存在互素的 $m > n > 0$, m, n 一奇一偶, 使得

$$a = x^2 = m^2 - n^2, \quad (11.1)$$

$$b = y^2 = 2mn, \quad (11.2)$$

$$c = z = m^2 + n^2. \quad (11.3)$$

由 (11.1) 知 x 为奇数, 由引理 1, $x^2 \equiv 1 \pmod{4}$ 。

考虑 m, n 的奇偶性, 由于 m, n 一奇一偶, 且 $m^2 - n^2 \equiv 1 \pmod{4}$, 可以验证只有当 m 为奇数、 n 为偶数时满足条件。

由 (11.2), $y^2 = 2mn$ 。由于 m 为奇数, n 为偶数, 设 $n = 2n_1$, 则

$$y^2 = 4mn_1 \Rightarrow \left(\frac{y}{2}\right)^2 = mn_1.$$

由于 $\gcd(m, n) = 1$, 故 $\gcd(m, n_1) = 1$, 因此 m 和 n_1 均为平方数, 设 $m = r^2$, $n_1 = s^2$, 则 $n = 2s^2$ 。

代入 (11.1):

$$x^2 = m^2 - n^2 = r^4 - 4s^4.$$

整理得

$$x^2 + 4s^4 = r^4.$$

令 $X = x$, $Y = 2s^2$, $Z = r^2$, 则

$$X^2 + Y^2 = Z^2, \quad \gcd(X, Y, Z) = 1.$$

这又是一个勾股方程! 应用勾股数通解公式, 存在互素的 $u > v > 0$, u, v 一奇一偶, 使

$$X = x = u^2 - v^2, \quad (11.4)$$

$$Y = 2s^2 = 2uv, \quad (11.5)$$

$$Z = r^2 = u^2 + v^2. \quad (11.6)$$

由 (11.5) 得 $s^2 = uv$ 。由于 $\gcd(u, v) = 1$, 故 u 和 v 均为平方数, 设 $u = a^2$, $v = b^2$, 则

$$r^2 = u^2 + v^2 = a^4 + b^4.$$

现在我们得到了一个新解 (a, b, r) 满足 $a^4 + b^4 = r^2$ 。比较这个解与原始解的大小:

$$z = m^2 + n^2 = r^4 + 4s^4 > r^4 \geq r^2 \geq r.$$

因此 $z > r$, 即我们得到了一个更小的解。

重复这一过程, 我们可以得到无穷递降的正整数序列 $z > r > r_1 > r_2 > \cdots$, 但正整数不能无穷递减, 矛盾! 故假设错误, 原方程无解。□

注 4 (无穷递降法). 费马发明的这一方法非常巧妙: 假设解存在, 然后构造出一个更小的解, 如此往复, 得到无穷递减的正整数序列, 但正整数有最小元 1, 矛盾. 这一方法在数论中有广泛应用.

推论 11.50. 费马大定理对 $n = 4k$ (k 为正整数) 成立.

证明. 如果 $a^{4k} + b^{4k} = c^{4k}$ 有解, 则 $(a^k)^4 + (b^k)^4 = (c^k)^4$, 与定理矛盾. $\square$

例 11.51. 证明方程 $x^4 + 4y^4 = z^2$ 没有正整数解.

注 5 (欧拉猜想). 欧拉曾猜想: 对于 $n > 2$, 至少需要 n 个 n 次幂才能表示另一个 n 次幂. 即方程

$$a_1^n + a_2^n + \cdots + a_{n-1}^n = b^n$$

无正整数解.

注 6. 欧拉猜想在 $n = 4$ 时被否定: *Roger Frye* 于 1988 年发现

$$95800^4 + 217519^4 + 414560^4 = 422481^4.$$

这是最小的反例.

费马大定理的完整证明历程

虽然费马在 17 世纪就提出了这个猜想, 但完整的证明直到 1994 年才由安德鲁·怀尔斯完成. 主要历程如下:

- $n = 4$: 费马本人用无穷递降法证明
- $n = 3$: 欧拉证明 (后由高斯等人完善)
- $n = 5$: 狄利克雷和勒让德证明
- $n = 7$: 拉梅证明
- 索菲·热尔曼证明: 若 p 是奇素数, 且 $2p + 1$ 也是素数, 则费马大定理对 p 成立
- 库默尔引入理想数理论, 证明了对正则素数的情形
- 1983 年, 法尔廷斯证明莫德尔猜想, 推出费马方程对每个 $n > 2$ 至多有有限个本原解
- 1994 年, 怀尔斯完成最终证明, 使用模形式、椭圆曲线等现代数学工具

注 7. 怀尔斯的证明长达 100 多页, 使用了 20 世纪数学的许多深刻成果, 远远超出了费马时代的数学知识. 大多数人认为费马当年可能并没有真正证明这个定理, 或者他的证明只适用于某些特殊情形.

线性不定方程

线性不定方程, 也称为丢番图方程, 是数论中研究的重要对象. 这类方程最早出现在古希腊数学家丢番图的著作《算术》中, 因此得名丢番图方程.

中国古代数学著作《九章算术》和《孙子算经》中也包含了大量不定方程的问题, 特别是“物不知数”问题 (即中国剩余定理) 就是线性不定方程组的典型例子.

17 世纪, 费马、欧拉等数学家对不定方程进行了深入研究, 推动了现代数论的发展. 线性不定方程 $ax + by = c$ 的理论是初等数论的基础内容之一.

定义 9 (线性不定方程). 形如 $ax + by = c$ 的方程称为二元一次不定方程, 其中 a, b, c 为整数, 且 a, b 不全为零。

定理 11.52 (解的存在性定理). 方程 $ax + by = c$ 有整数解的充分必要条件是 $\gcd(a, b) \mid c$ 。

证明. 必要性: 如果 $ax_0 + by_0 = c$, 由于 $\gcd(a, b)$ 整除 a 和 b , 故也整除 c 。

充分性: 设 $d = \gcd(a, b)$ 且 $d \mid c$. 令 $a = da', b = db', c = dc'$, 则 $\gcd(a', b') = 1$. 由贝祖定理, 存在整数 u, v 使得 $a'u + b'v = 1$, 于是 $a'(c'u) + b'(c'v) = c'$, 即 $a(c'u) + b(c'v) = c$. $\square$

定理 11.53 (解的结构定理). 如果 (x_0, y_0) 是方程 $ax + by = c$ 的一个特解, 则通解为:

$$\begin{cases} x = x_0 + k \cdot \frac{b}{\gcd(a, b)} \\ y = y_0 - k \cdot \frac{a}{\gcd(a, b)} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Euclid 算法 (辗转相除法)

例 11.54. 解不定方程 $7x + 11y = 1$ 。

解法. 首先验证 $\gcd(7, 11) = 1$, 且 $1 \mid 1$, 故方程有解。

使用辗转相除法:

$$11 = 1 \times 7 + 4$$

$$7 = 1 \times 4 + 3$$

$$4 = 1 \times 3 + 1$$

$$3 = 3 \times 1 + 0$$

回代求解:

$$1 = 4 - 1 \times 3$$

$$= 4 - 1 \times (7 - 1 \times 4) = 2 \times 4 - 7$$

$$= 2 \times (11 - 1 \times 7) - 7 = 2 \times 11 - 3 \times 7$$

因此得到特解: $x_0 = -3, y_0 = 2$ 。

通解为:

$$\begin{cases} x = -3 + 11k \\ y = 2 - 7k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$\square$

例 11.55. 解方程 $15x + 25y = 100$ 。

解法. 首先计算 $\gcd(15, 25) = 5$, 且 $5 \mid 100$, 故方程有解。

简化方程: $3x + 5y = 20$ 。

使用辗转相除法求 $3x + 5y = 1$ 的特解:

$$5 = 1 \times 3 + 2$$

$$3 = 1 \times 2 + 1$$

$$2 = 2 \times 1 + 0$$

回代:

$$\begin{aligned}1 &= 3 - 1 \times 2 \\ &= 3 - 1 \times (5 - 1 \times 3) = 2 \times 3 - 5\end{aligned}$$

因此 $3x + 5y = 1$ 的特解为 $x_0 = 2, y_0 = -1$ 。

$3x + 5y = 20$ 的特解为 $x_0 = 40, y_0 = -20$ 。

通解为:

$$\begin{cases} x = 40 + 5k \\ y = -20 - 3k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

□

代数方法

注 8. 设 (x_0, y_0) 和 (x_1, y_1) 都是方程 $ax + by = c$ 的解, 则:

$$a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) = 0$$

即 $(x_1 - x_0, y_1 - y_0)$ 是齐次方程 $ax + by = 0$ 的解。

证明. 由 $ax_0 + by_0 = c$ 和 $ax_1 + by_1 = c$ 相减得:

$$a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) = 0$$

齐次方程 $ax + by = 0$ 的通解为:

$$\begin{cases} x = k \cdot \frac{b}{\gcd(a, b)} \\ y = -k \cdot \frac{a}{\gcd(a, b)} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

因此, 原方程的通解为特解加上齐次方程的通解。

□

几何方法

注 9 (几何直观). 方程 $ax + by = c$ 在笛卡尔坐标系中表示一条直线, 整数解对应直线上的整点。

直线的斜率为 $k = -\frac{a}{b}$, 如果已知一个整点 (x_0, y_0) , 则沿直线移动时, x 坐标每增加 $b/\gcd(a, b)$, y 坐标就减少 $a/\gcd(a, b)$, 这样才能保持仍在整点上。

矩阵方法

注 10. 方程 $ax + by = c$ 可以写成矩阵形式:

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c$$

通过初等变换将 (a, b) 化为 $(\gcd(a, b), 0)$, 同时记录变换矩阵, 即可求得特解。

证明. 算法步骤:

1. 对 (a, b) 进行辗转相除法, 记录每一步的变换矩阵。

2. 当得到 $(\gcd(a, b), 0)$ 时, 所有变换矩阵的乘积 P 满足:

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = (\gcd(a, b) \ 0)P^{-1}$$

3. 特解为:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} c/\gcd(a, b) \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. 齐次方程的通解为:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} b/\gcd(a, b) \\ -a/\gcd(a, b) \end{pmatrix} \quad k \in \mathbb{Z}$$

□

多元线性不定方程

定义 10 (多元线性不定方程). 形如 $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = c$ 的方程称为 n 元一次不定方程, 其中 $a_1, a_2, \dots, a_n, c$ 为整数, 且系数不全为零。

定理 11.56 (多元方程解的存在性). 方程 $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = c$ 有整数解的充分必要条件是:

$$\gcd(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid c$$

证明. 必要性: 如果 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是方程的解, 则 $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = c$. 由于 $\gcd(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 整除每个 a_i , 故也整除 c .

充分性: 数学归纳, 当 $n=2$ 已成立, 假设 $n=k$ 时成立, 考虑 $n=k+1$ 的情况

设 $d = \gcd(a_1, a_2, \dots, a_k)$, 则原方程等价于:

$$dX + a_{k+1}x_{k+1} = c$$

其中 X 是整数变量。由 $n=2$ 的情形, 此方程有解当且仅当 $\gcd(d, a_{k+1}) \mid c$, 即 $\gcd(a_1, a_2, \dots, a_{k+1}) \mid c$. □

例 11.57 (三元不定方程的基本解法). 解方程 $3x + 5y + 7z = 1$ 。

解法 1: 逐步消元法. 先解 $3x + 5y = 1$, 得特解 $x = -3, y = 2$, 通解:

$$\begin{cases} x = -3 + 5k \\ y = 2 - 3k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

代入原方程:

$$3(-3 + 5k) + 5(2 - 3k) + 7z = 1 \Rightarrow 1 + 7z = 1 \Rightarrow z = 0$$

因此一组特解为:

$$\begin{cases} x = -3 + 5k \\ y = 2 - 3k \\ z = 0 \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

□

解法 2: 参数法. 设 $d = \gcd(3, 5) = 1$, 先解 $3x + 5y = 1 - 7z$ 。

对任意整数 z , 只要 $1 - 7z$ 是整数, 方程 $3x + 5y = 1 - 7z$ 都有解。设特解为 $x_0(z), y_0(z)$, 则通解为:

$$\begin{cases} x = x_0(z) + 5t \\ y = y_0(z) - 3t \\ z = z \end{cases} \quad t, z \in \mathbb{Z}$$

具体地, 对每个 z , 我们可以用二元方程的方法求解 $x_0(z), y_0(z)$ 。 □

例 11.58 (四元不定方程). 解方程 $2x + 3y + 5z + 7w = 11$ 。

解. 设 $d_1 = \gcd(2, 3, 5) = 1$, 先解 $2x + 3y + 5z = 11 - 7w$ 。

对任意整数 w , 只要 $11 - 7w$ 是整数, 方程 $2x + 3y + 5z = 11 - 7w$ 都有解。我们可以进一步分解:

设 $d_2 = \gcd(2, 3) = 1$, 先解 $2x + 3y = 11 - 7w - 5z$ 。

对任意整数 w, z , 只要 $11 - 7w - 5z$ 是整数, 方程 $2x + 3y = 11 - 7w - 5z$ 都有解。

因此通解可以表示为:

$$\begin{cases} x = x_0(w, z) + 3t \\ y = y_0(w, z) - 2t \\ z = z \\ w = w \end{cases} \quad t, z, w \in \mathbb{Z}$$

其中 $x_0(w, z), y_0(w, z)$ 是方程 $2x + 3y = 11 - 7w - 5z$ 的特解。□

一些实际应用问题

例 11.59 (百钱买百鸡问题). 鸡翁一, 值钱五; 鸡母一, 值钱三; 鸡雏三, 值钱一。百钱买百鸡, 问鸡翁、母、雏各几何?

解. 设鸡翁 x 只, 鸡母 y 只, 鸡雏 z 只, 则:

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 5x + 3y + \frac{1}{3}z = 100 \end{cases}$$

消去 z 得: $7x + 4y = 100$

解此方程: 先解 $7x + 4y = 1$, 得特解 $x = -1, y = 2$, 于是 $7x + 4y = 100$ 的特解为: $x = -100, y = 200$

通解为:

$$\begin{cases} x = -100 + 4k \\ y = 200 - 7k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

由 $x, y, z \geq 0$ 得约束条件:

$$-100 + 4k \geq 0, \quad 200 - 7k \geq 0, \quad 100 - x - y \geq 0$$

解得 $25 \leq k \leq 28$, 对应四组解:

- $k = 25: x = 0, y = 25, z = 75$
- $k = 26: x = 4, y = 18, z = 78$
- $k = 27: x = 8, y = 11, z = 81$
- $k = 28: x = 12, y = 4, z = 84$

□

例 11.60. 某工厂生产三种产品 A 、 B 、 C , 每件产品分别需要原材料 $2kg$ 、 $3kg$ 、 $5kg$ 。现有原材料 $100kg$, 要求至少生产产品 A 5 件, 产品 B 10 件, 产品 C 8 件。问如何安排生产计划使原材料刚好用完?

解. 设生产 A、B、C 产品分别为 x, y, z 件, 则:

$$2x + 3y + 5z = 100$$

约束条件: $x \geq 5, y \geq 10, z \geq 8$

先求特解: 观察得 $x = 15, y = 10, z = 8$ $2 \times 15 + 3 \times 10 + 5 \times 8 = 30 + 30 + 40 = 100$, 符合条件。

通解为: 设 $d = \gcd(2, 3) = 1$, 先解 $2x + 3y = 100 - 5z$

对每个 z , 方程 $2x + 3y = 100 - 5z$ 有通解:

$$\begin{cases} x = x_0(z) + 3t \\ y = y_0(z) - 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{Z}$$

结合约束条件 $x \geq 5, y \geq 10, z \geq 8$, 可求出所有可行解。 □

11.4 同余方程: 一次同余方程, 同余方程组, 高次同余方程

一次同余方程

同余方程组

高次同余方程

合数模的分解与解数定理

当模数 m 为合数时, 由算术基本定理, 我们可以将其分解为两两互素的因子的乘积, 从而将原问题转化为模素数或素数方幂的同余式组。

定理 11.61 (解数定理). 设 $m = m_1 m_2 \cdots m_k$, 且 m_i 两两互素。则同余式

$$f(x) \equiv 0 \pmod{m}$$

与同余式组

$$\begin{cases} f(x) \equiv 0 \pmod{m_1} \\ f(x) \equiv 0 \pmod{m_2} \\ \vdots \\ f(x) \equiv 0 \pmod{m_k} \end{cases}$$

等价 (即同解)。并且, 若同余式组中每个方程的解数分别为 $T_1, T_2, \dots, T_k$, 则原同余式有 $T_1 T_2 \cdots T_k$ 个解。

证明. 由于 $m_i \mid m$, 故 $f(x) \equiv 0 \pmod{m}$ 蕴含 $f(x) \equiv 0 \pmod{m_i}$ 对每个 i 成立。反之, 由于 m_i 两两互素, 根据中国剩余定理, 若 $f(x) \equiv 0 \pmod{m_i}$ 对每个 i 成立, 则 $f(x) \equiv 0 \pmod{m}$ 成立。因此两者等价。

关于解数, 由于 m_i 两两互素, 中国剩余定理保证了同余式组中每个方程的解可以任意组合, 通过 CRT 唯一地确定模 m 的一个解。因此总解数为各方程解数的乘积。 □

注 11. 只要有一个小模数方程无解, 整个大模数方程就无解。

例 11.62. 解同余式 $f(x) \equiv 0 \pmod{35}$, 其中 $f(x) = x^4 + 2x^3 + 8x + 9$.

解. 由于 $35 = 5 \times 7$, 原同余式等价于:

$$\begin{cases} f(x) \equiv 0 \pmod{5} \\ f(x) \equiv 0 \pmod{7} \end{cases}$$

- 模 5: 在完全剩余系 $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ 中试解, 得 $x \equiv 1, 4 \pmod{5}$.
- 模 7: 在完全剩余系 $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 中试解, 得 $x \equiv 3, 5, 6 \pmod{7}$.

根据定理, 原同余式共有 $2 \times 3 = 6$ 个解. 设 $x \equiv b_1 \pmod{5}$, $x \equiv b_2 \pmod{7}$, 其中 $b_1 = 1, 4$, $b_2 = 3, 5, 6$. 利用中国剩余定理, 得到 $x \equiv 7b_1 + 15b_2 \pmod{35}$, 代入计算得:

$$x \equiv 31, 26, 6, 24, 19, 34 \pmod{35}.$$

□

素数方幂模的提升法

对于模 p^α 的同余式, 我们可以从模 p 的解出发, 逐步提升到模 $p^2, p^3, \dots$ 的解。

定理 11.63 (Hensel 引理). 设 $x \equiv x_1 \pmod{p}$ 是同余式 $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$ 的一个解, 且 $f'(x_1) \not\equiv 0 \pmod{p}$. 则存在唯一的 $x_2 \pmod{p^2}$, 使得 $x \equiv x_2 \pmod{p^2}$ 是 $f(x) \equiv 0 \pmod{p^2}$ 的一个解, 且 $x_2 \equiv x_1 \pmod{p}$.

证明. 设 $x = x_1 + pt$, 代入 $f(x) \equiv 0 \pmod{p^2}$. 由泰勒展开:

$$f(x_1 + pt) \equiv f(x_1) + pt f'(x_1) \pmod{p^2}.$$

由于 $f(x_1) \equiv 0 \pmod{p}$, 设 $f(x_1) = pA$. 则同余式变为:

$$pA + pt f'(x_1) \equiv 0 \pmod{p^2} \Rightarrow A + t f'(x_1) \equiv 0 \pmod{p}.$$

因为 $f'(x_1) \not\equiv 0 \pmod{p}$, 故 $f'(x_1)$ 模 p 可逆, 从而 t 有唯一解模 p . 设此解为 $t \equiv t_1 \pmod{p}$, 则 $x_2 = x_1 + pt_1$ 即为所求. □

注 12. 如果导数模 p 为零, 情况会更复杂, 解可能无法提升, 也可能提升为多个解。

例 11.64. 解同余式 $f(x) \equiv 0 \pmod{27}$, 其中 $f(x) = x^4 + 7x + 4$.

解. 1. 解 $f(x) \equiv 0 \pmod{3}$. 在 $\{0, 1, 2\}$ 中试解, 得 $x \equiv 1 \pmod{3}$. 计算 $f'(x) = 4x^3 + 7$, $f'(1) = 11 \equiv 2 \not\equiv 0 \pmod{3}$, 满足提升条件。

2. 提升到模 9: 设 $x = 1 + 3t_1$, 代入 $f(x) \equiv 0 \pmod{9}$.

$$f(1) + 3t_1 f'(1) \equiv 0 \pmod{9}.$$

计算: $f(1) = 12 \equiv 3 \pmod{9}$, $f'(1) = 11 \equiv 2 \pmod{3}$. 同余式化为:

$$3 + 3t_1 \cdot 2 \equiv 0 \pmod{9} \Rightarrow 1 + 2t_1 \equiv 0 \pmod{3}.$$

解得 $t_1 \equiv 1 \pmod{3}$, 即 $t_1 = 1 + 3t_2$. 故 $x = 1 + 3(1 + 3t_2) = 4 + 9t_2$.

3. 提升到模 27: 设 $x = 4 + 9t_2$, 代入 $f(x) \equiv 0 \pmod{27}$ 。

$$f(4) + 9t_2 f'(4) \equiv 0 \pmod{27}.$$

计算: $f(4) = 4^4 + 7 \cdot 4 + 4 = 256 + 28 + 4 = 288 \equiv 18 \pmod{27}$, $f'(4) = 4 \cdot 64 + 7 = 256 + 7 = 263 \equiv 20 \pmod{27}$ 。同余式化为:

$$18 + 9t_2 \cdot 20 \equiv 0 \pmod{27} \Rightarrow 2 + 20t_2 \equiv 0 \pmod{3}.$$

因为 $20 \equiv 2 \pmod{3}$, 所以 $2 + 2t_2 \equiv 0 \pmod{3}$, 即 $t_2 \equiv 2 \pmod{3}$ 。设 $t_2 = 2 + 3t_3$, 则 $x = 4 + 9(2 + 3t_3) = 22 + 27t_3$ 。

因此, 解为 $x \equiv 22 \pmod{27}$ 。 □

模素数同余式的多项式理论

在模素数 p 下, 多项式具有与复数域上类似的性质, 这得益于费马小定理。

定理 11.65 (多项式降次). 设 $f(x)$ 是整系数多项式, 则同余式 $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$ 与一个次数不超过 $p-1$ 的多项式 $r(x) \equiv 0 \pmod{p}$ 等价。

证明. 对 $f(x)$ 做带余除法, 除以 $x^p - x$:

$$f(x) = (x^p - x)q(x) + r(x), \quad \deg r(x) \leq p-1.$$

由费马小定理, $x^p - x \equiv 0 \pmod{p}$, 故 $f(x) \equiv r(x) \pmod{p}$ 。 □

定理 11.66 (因式分解). 设 $f(x)$ 是模 p 下的 n 次多项式 (即首项系数模 p 不为 0), 且 $x \equiv d_1, d_2, \dots, d_k \pmod{p}$ 是 $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$ 的 k 个不同的解。则存在多项式 $f_k(x)$, 使得

$$f(x) \equiv (x - d_1)(x - d_2) \cdots (x - d_k) f_k(x) \pmod{p},$$

其中 $\deg f_k(x) = \deg f(x) - k$, 且 $f_k(x)$ 与 $f(x)$ 首项系数相同。

证明. 对 k 用数学归纳法。当 $k=1$ 时, 对 $f(x)$ 做带余除法, 除以 $(x - d_1)$:

$$f(x) = (x - d_1)f_1(x) + r.$$

代入 $x = d_1$, 得 $f(d_1) \equiv 0 \pmod{p}$, 故 $r \equiv 0 \pmod{p}$, 即 $f(x) \equiv (x - d_1)f_1(x) \pmod{p}$ 。 $f_1(x)$ 的次数为 $n-1$, 首项系数与 $f(x)$ 相同。

假设对 $k-1$ 成立, 即 $f(x) \equiv (x - d_1) \cdots (x - d_{k-1}) f_{k-1}(x) \pmod{p}$ 。由于 d_k 也是 $f(x)$ 的根, 且 d_k 与 $d_1, \dots, d_{k-1}$ 模 p 不同, 代入得:

$$0 \equiv f(d_k) \equiv (d_k - d_1) \cdots (d_k - d_{k-1}) f_{k-1}(d_k) \pmod{p}.$$

由于 $d_k - d_i \not\equiv 0 \pmod{p}$, 故 $f_{k-1}(d_k) \equiv 0 \pmod{p}$ 。对 $f_{k-1}(x)$ 应用 $k=1$ 的情况, 即得结论。 □

推论 11.67 (Wilson 定理). 在模 p 下, 有

$$(i) \quad x^{p-1} - 1 \equiv (x-1)(x-2) \cdots (x-(p-1)) \pmod{p}.$$

$$(ii) \quad (p-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

证明. (i) 由费马小定理, $x^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$ 有 $p-1$ 个解 $x \equiv 1, 2, \dots, p-1 \pmod{p}$ 。根据因式分解定理, 且两边都是首一多项式, 故相等。(ii) 在 (i) 中令 $x = 0$, 得 $-1 \equiv (-1)^{p-1}(p-1)! \pmod{p}$ 。当 p 为奇素数时, $(-1)^{p-1} = 1$; 当 $p = 2$ 时, 直接验证 $1! + 1 = 2 \equiv 0 \pmod{2}$ 。故结论成立。 $\square$

定理 11.68 (解数上界). 模素数 p 的 n 次同余式 $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$ 的解数不超过 n 。

证明. 假设有 $n+1$ 个不同的解 $d_1, d_2, \dots, d_{n+1}$ 。由因式分解定理, $f(x) \equiv a_n(x-d_1)(x-d_2)\cdots(x-d_n) \pmod{p}$ 。代入 $x = d_{n+1}$, 得

$$0 \equiv f(d_{n+1}) \equiv a_n(d_{n+1} - d_1)(d_{n+1} - d_2)\cdots(d_{n+1} - d_n) \pmod{p}.$$

由于 $a_n \not\equiv 0 \pmod{p}$, 且 $d_{n+1} - d_i \not\equiv 0 \pmod{p}$, 乘积不为 0, 矛盾。 $\square$

定理 11.69 (首一化定理). 设 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 。若 $a_n \not\equiv 0 \pmod{p}$, 则同余式 $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$ 与首一同余式

$$x^n + (a'_n a_{n-1}) x^{n-1} + \cdots + (a'_n a_0) \equiv 0 \pmod{p}$$

等价, 其中 a'_n 是 a_n 模 p 的逆元, 即 $a'_n a_n \equiv 1 \pmod{p}$ 。

证明. 由于 $a_n \not\equiv 0 \pmod{p}$, a_n 模 p 可逆。将原同余式两边同时乘以 a'_n , 得:

$$a'_n f(x) \equiv a'_n a_n x^n + a'_n a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a'_n a_0 \equiv 0 \pmod{p}.$$

因为 $a'_n a_n \equiv 1 \pmod{p}$, 所以上式等价于:

$$x^n + (a'_n a_{n-1}) x^{n-1} + \cdots + (a'_n a_0) \equiv 0 \pmod{p}.$$

由于乘以可逆元不改变同余式的解集, 故两者等价。 $\square$

注 13. 这个定理允许我们将任意一个首项系数可逆的同余式, 通过乘以首项系数的逆元, 转化为一个首一的同余式。

定理 11.70 (同余式有 n 个解的充要条件). 设 $n \leq p$, 则同余式

$$f(x) \equiv 0 \pmod{p}, \quad f(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$$

有 n 个解的充分与必要条件是 $f(x)$ 除 $x^p - x$ 所得余式的一切系数都是 p 的倍数。

证明. 因为 $f(x)$ 的首项系数是 1, 故由带余除法知存在整系数多项式 $q(x)$ 及 $r(x)$ 使

$$x^p - x = f(x)q(x) + r(x),$$

且 $\deg r(x) < n$, $\deg q(x) = p - n$ 。

必要性: 若同余式 $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$ 有 n 个解, 则由费马小定理知这 n 个解都是 $x^p - x \equiv 0 \pmod{p}$ 的解。由 $x^p - x = f(x)q(x) + r(x)$ 知这 n 个解也是 $r(x) \equiv 0 \pmod{p}$ 的解。但 $\deg r(x) < n$, 故由解数上界定理 (模 p 的 n 次同余式解数不超过 n) 知, $r(x)$ 的系数都是 p 的倍数。

充分性: 若 $r(x)$ 的系数都被 p 整除, 则由 $x^p - x = f(x)q(x) + r(x)$ 及费马小定理知, 对任何整数 x 来说, 都有

$$f(x)q(x) \equiv 0 \pmod{p}.$$

这就是说, $f(x)q(x) \equiv 0 \pmod{p}$ 有 p 个不同的解 $x \equiv 0, 1, \dots, p-1 \pmod{p}$ 。假设 $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$ 的解数 $k < n$, 由解数上界定理知, $q(x) \equiv 0 \pmod{p}$ 的解数 $h \leq p - n$ 。于是 $f(x)q(x) \equiv 0 \pmod{p}$ 的解数 $\leq k + h < p$, 这与上面所得到的结论矛盾。故定理获证。 $\square$

注 14. 这个定理给出了同余式有特定数量解的一个深刻而实用的判据。它建立了多项式 $f(x)$ 的根的性质与 $f(x)$ 除以 $x^p - x$ 的余式系数之间的联系。条件 $n \leq p$ 是关键, 否则由解数上界定理, 不可能有超过 n 个解。这个定理在算法数论中有重要应用, 特别是在判断多项式是否在模 p 下完全分解为一次因式的乘积时。

11.5 数论三定理: 费马小定理, 欧拉定理, 中国剩余定理

11.6 算术基本定理, 素数的分类与计数, 梅森素数与完全数

11.7 平方剩余的概念, 素数模的平方剩余

平方剩余

定义 11 (平方剩余). 设 $m \in \mathbb{N}^*$ 且 $m \geq 2$, $a \in \mathbb{Z}$ 且 $(a, m) = 1$ 。若存在 $x \in \mathbb{Z}$ 使得

$$x^2 \equiv a \pmod{m}$$

则称 a 为模 m 的平方剩余, 否则称 a 为模 m 的平方非剩余。

例 11.71 (模 5 的平方剩余). 考虑模 5 的简化剩余系 $\{1, 2, 3, 4\}$, 计算每个元素的平方:

$$1^2 \equiv 1, \quad 2^2 \equiv 4, \quad 3^2 \equiv 4, \quad 4^2 \equiv 1 \pmod{5}$$

因此, 模 5 的平方剩余是 1, 4; 平方非剩余是 2 和 3。

例 11.72 (模 7 的平方剩余). 考虑模 7 的简化剩余系 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 计算平方:

$$1^2 \equiv 1, \quad 2^2 \equiv 4, \quad 3^2 \equiv 2, \quad 4^2 \equiv 2, \quad 5^2 \equiv 4, \quad 6^2 \equiv 1 \pmod{7}$$

因此, 模 7 的平方剩余是 1, 2, 4; 平方非剩余是 3, 5, 6。

素数模的平方剩余

定理 11.73 (解的数量定理). 设 p 为奇素数, $a \in \mathbb{Z}$ 且 $(a, p) = 1$ 。若 a 是模 p 的平方剩余, 则同余方程 $x^2 \equiv a \pmod{p}$ 恰有 2 个解。

证明. 设 $x \equiv x_0 \pmod{p}$ 是方程的一个解, 则 $x \equiv -x_0 \pmod{p}$ 也是解, 因为

$$(-x_0)^2 = x_0^2 \equiv a \pmod{p}$$

现在证明这两个解是不同的。假设 $x_0 \equiv -x_0 \pmod{p}$, 则 $2x_0 \equiv 0 \pmod{p}$ 。由于 p 是奇素数, $p \nmid 2$, 故 $p \mid x_0$, 从而 $p \mid x_0^2 \equiv a \pmod{p}$, 与 $(a, p) = 1$ 矛盾。

再证明没有其他解。假设存在第三个解 x_1 , 满足 $x_1 \not\equiv x_0 \pmod{p}$ 且 $x_1 \not\equiv -x_0 \pmod{p}$ 。则

$$x_1^2 \equiv a \pmod{p}, \quad x_0^2 \equiv a \pmod{p}$$

相减得 $x_1^2 - x_0^2 \equiv 0 \pmod{p}$, 即 $p \mid (x_1 - x_0)(x_1 + x_0)$ 。

由于 p 是素数, $p \mid (x_1 - x_0)$ 或 $p \mid (x_1 + x_0)$ 。若 $p \mid (x_1 - x_0)$, 则 $x_1 \equiv x_0 \pmod{p}$; 若 $p \mid (x_1 + x_0)$, 则 $x_1 \equiv -x_0 \pmod{p}$ 。这与假设矛盾, 故不存在第三个解。□

定理 11.74 (欧拉判别准则). 设 p 为奇素数, $a \in \mathbb{Z}$ 且 $(a, p) = 1$, 则:

1. $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p} \iff a$ 是模 p 的平方剩余
2. $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p} \iff a$ 是模 p 的平方非剩余

证明. 由费马小定理: $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, 即

$$a^{p-1} - 1 = \left(a^{\frac{p-1}{2}} - 1\right) \left(a^{\frac{p-1}{2}} + 1\right) \equiv 0 \pmod{p}$$

故 $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$ 或 $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$ 。

($\Rightarrow$) 若 a 是模 p 的平方剩余, 则存在 $x \in \mathbb{Z}$ 使得 $x^2 \equiv a \pmod{p}$ 。于是

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv (x^2)^{\frac{p-1}{2}} = x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

($\Leftarrow$) 假设 $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$ 。考虑多项式 $f(x) = x^{\frac{p-1}{2}} - 1$, 它在模 p 下至多有 $\frac{p-1}{2}$ 个根。

但序列 $1^2, 2^2, \dots, \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$ 给出了 $\frac{p-1}{2}$ 个不同的平方剩余, 且每个平方剩余 a 都满足 $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$, 即都是 $f(x)$ 的根。

因此, 这些就是 $f(x)$ 的所有根。如果 a 满足 $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$, 则 a 必须是某个平方剩余。 $\square$

推论 11.75. 设 p 为奇素数, 则:

1. -1 是模 p 的平方剩余 $\iff p \equiv 1 \pmod{4}$
2. -1 是模 p 的平方非剩余 $\iff p \equiv 3 \pmod{4}$

证明. 由欧拉判别准则:

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p} \iff \frac{p-1}{2} \text{ 是偶数} \iff p \equiv 1 \pmod{4}$$

同理, $(-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p} \iff p \equiv 3 \pmod{4}$ 。 $\square$

定理 11.76 (平方剩余的数量). 设 p 为奇素数, 则在模 p 的简化剩余系 $1, 2, \dots, p-1$ 中, 平方剩余和平方非剩余各有 $\frac{p-1}{2}$ 个。

证明. 考虑序列 $1^2, 2^2, \dots, \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$, 它们都是平方剩余。

首先证明这些数两两模 p 不同余。假设 $i^2 \equiv j^2 \pmod{p}$, 其中 $1 \leq i < j \leq \frac{p-1}{2}$, 则 $p \mid (i-j)(i+j)$ 。

由于 $1 \leq i, j \leq \frac{p-1}{2}$, 有 $0 < j-i < p$ 且 $0 < i+j < p$, 故 $p \nmid (i-j)$ 且 $p \nmid (i+j)$, 矛盾。

因此, 这 $\frac{p-1}{2}$ 个数给出了 $\frac{p-1}{2}$ 个不同的平方剩余。由于简化剩余系共有 $p-1$ 个元素, 故平方非剩余也有 $\frac{p-1}{2}$ 个。 $\square$

平方剩余具有一些优美而重要的代数性质, 这些性质在计算和理论推导中非常有用。

命题 11.77 (乘法性质). 设 p 为奇素数, $(a, p) = (b, p) = 1$, 则:

1. 平方剩余 $\times$ 平方剩余 = 平方剩余
2. 平方非剩余 $\times$ 平方非剩余 = 平方剩余

3. 平方剩余 $\times$ 平方非剩余 = 平方非剩余

证明. 由欧拉判别准则:

- 若 $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1, b^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1$, 则 $(ab)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1$
- 若 $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1, b^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1$, 则 $(ab)^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)(-1) = 1$
- 若 $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1, b^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1$, 则 $(ab)^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1$

□

命题 11.78 (变换性质). 设 p 为奇素数:

1. 在模 p 的简化剩余系中, 一定存在平方剩余和平方非剩余
2. 设 a 是平方剩余, 则 $\{a, 2a, \dots, (p-1)a\}$ 也是简化剩余系, 其中平方剩余和平方非剩余的数量仍为 $\frac{p-1}{2}$
3. 设 b 是平方非剩余, 则 $\{b, 2b, \dots, (p-1)b\}$ 也是简化剩余系, 其中平方非剩余和平方剩余的数量仍为 $\frac{p-1}{2}$

证明. (1) 首先, 1 是平方剩余; 其次, 考虑集合 $\left\{-\frac{p-1}{2}, \dots, -1, 1, \dots, \frac{p-1}{2}\right\}$, 其平方最多产生 $\frac{p-1}{2}$ 个不同的值, 而集合中有 $p-1$ 个元素, 故存在平方非剩余。

(2) 由于 $(a, p) = 1$, $\{a, 2a, \dots, (p-1)a\}$ 是简化剩余系。设 A 是原剩余系中的平方剩余集合, 则 aA 也是平方剩余集合, 故平方剩余数量不变。

(3) 类似可证。

□

例 11.79 (计算模 7 的平方剩余). **方法一: 直接计算**

x	1	2	3	4	5	6
x^2	1	4	9	16	25	36
$x^2 \bmod 7$	1	4	2	2	4	1

因此, 模 7 的平方剩余是 1, 2, 4。

方法二: 欧拉判别准则 $\frac{p-1}{2} = 3$, 计算 $a^3 \bmod 7$:

$$\begin{aligned}
 1^3 &= 1 \equiv 1 \pmod{7} \quad (\text{平方剩余}) \\
 2^3 &= 8 \equiv 1 \pmod{7} \quad (\text{平方剩余}) \\
 3^3 &= 27 \equiv 6 \equiv -1 \pmod{7} \quad (\text{平方非剩余}) \\
 4^3 &= 64 \equiv 1 \pmod{7} \quad (\text{平方剩余}) \\
 5^3 &= 125 \equiv 6 \equiv -1 \pmod{7} \quad (\text{平方非剩余}) \\
 6^3 &= 216 \equiv 6 \equiv -1 \pmod{7} \quad (\text{平方非剩余})
 \end{aligned}$$

方法三: 平方序列 平方剩余为 $1^2, 2^2, 3^2 \bmod 7$, 即 1, 4, 2。

例 11.80 (模 37 的平方剩余). 计算 $1^2, 2^2, \dots, 18^2 \bmod 37$:

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, 12, 27, 7, 26, 10, 33, 21, 11, 3, 34, 28, 22 \pmod{37}$$

这些就是模 37 的所有平方剩余。

例 11.81 (高次同余方程的可解性). 设 p 是素数, 证明同余方程 $x^8 \equiv 16 \pmod{p}$ 至少有一解。

证明. 对方程进行因式分解:

$$x^8 - 16 = (x^4 - 4)(x^4 + 4) = (x^2 - 2)(x^2 + 2)(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$$

注意到 $x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1$, $x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1$ 。

因此, 只要以下方程之一有解, 原方程就有解:

$$x^2 \equiv 2, \quad x^2 \equiv -2, \quad (x + 1)^2 \equiv -1, \quad (x - 1)^2 \equiv -1 \pmod{p}$$

分情况讨论:

- 若 $p = 2$, 直接验证可知方程有解。
- 若 p 是奇素数:
 - 如果 2 或 -1 是平方剩余, 则方程有解。
 - 如果 2 和 -1 都是平方非剩余, 则 $(-2) = (-1) \times 2$ 是平方剩余, 方程也有解。

综上, 对任意素数 p , 方程 $x^8 \equiv 16 \pmod{p}$ 都有解。 □

例 11.82. 证明: 当 $p = 4m + 1$ 时, 方程 $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ 的解为 $x \equiv \pm(2m)! \pmod{p}$ 。

证明. 由 Wilson 定理: $(4m)! \equiv -1 \pmod{p}$ 。

将 $(4m)!$ 重新分组:

$$\begin{aligned} (4m)! &= (2m)!(2m+1)(2m+2) \cdots (4m) \\ &= (2m)! \prod_{k=1}^{2m} (2m+k) \end{aligned}$$

注意到 $2m+k = p - (2m-k+1)$,

所以

$$\begin{aligned} (4m)! &= (2m)! \prod_{k=1}^{2m} (p - (2m-k+1)) \\ &\equiv (2m)! \prod_{k=1}^{2m} (-(2m-k+1)) \pmod{p} \\ &= (2m)! (-1)^{2m} \prod_{k=1}^{2m} (2m-k+1) \\ &= (2m)! (2m)(2m-1) \cdots 1 = [(2m)!]^2 \pmod{p} \end{aligned}$$

因此 $[(2m)!]^2 \equiv -1 \pmod{p}$, 即 $x \equiv \pm(2m)!$ 是方程 $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ 的解。 □

11.8 勒让德符号, 二次互反律, 雅可比符号

11.9 合数模的平方剩余

11.10 原根与指数

11.11 表正整数为平方和

11.12 平方数与方幂和问题

11.13 数论中常见的数：伯努利数，斐波那契数列，不足数，过剩数，完全数，等幂和公式

11.14 分数与小数的相互转化

11.15 连分数与数论函数

11.16 复数与三角和



G 组合数学

12 组合数学

12.1 组合计数：组合恒等式，圆排列，有重复元素的排列与组合，母函数

12.2 组合几何：凸图形与凸包，覆盖与嵌入，海莱定理，整点/格点问题

12.3 图论：图的基本概念，图的连通性，树，特殊的图



H 微积分

13 微积分基础

